

Bożena ZWOLIŃSKA
Akademia Górniczo-Hutnicza

KSZTAŁTOWANIE STABILNOŚCI DYSKRETYCH SYSTEMÓW WYTWÓRCZYCH

Streszczenie. Opracowanie optymalnych technik monitorowania i sterowania stabilnością złożonych systemów produkcyjnych jest problemem NP – trudnym. W artykule przedstawiono algorytm kształtowania stabilności dynamicznego układu wytwórczego. Opracowany algorytm uwzględnia złożoność struktury produkcyjnej, występujące współzależności pojedynczych podsystemów z całą strukturą wytwórczą – zgodnie z teorią systemów złożonych oraz uwzględnia zmienność czasów realizacji i dynamikę zmian zapotrzebowania.

SHAPING STABILITY OF DISCRETE MANUFACTURING SYSTEMS

Summary. Developing optimal methods of monitoring and controlling the stability of complex production systems is an NP – hard problem. This article presents a dynamic production system stability shaping algorithm. The developed algorithm accounts for the complexity of the production structure, the existing codependences between individual systems and the entire production structure – according to the complex system theory and it takes under accounts the changeability of execution times and change dynamics of the demand.

1. Wprowadzenie

Customizacja wyrobów oraz dynamicznie zmienne zapotrzebowania klientów wpływa na powstawanie wielu wersji tego samego produktu, który posiada niewielkie zmiany, np.: inny kolor, inny zastosowany materiał, inne wyposażenie, itp. Dostosowanie producentów do zmiennych tendencji warunkuje ich konkurencyjność [3]. Obecnie nie tylko cena i jakość wytwarzanych wyrobów są determinantą sukcesu na globalnym rynku. Czas realizacji zamówienia zgodnego z zasadą „7 W” (właściwy produkt, we właściwej cenie, we właściwym stanie, we właściwej ilości i jakości, we właściwym miejscu oraz we właściwym czasie) warunkuje uzyskanie przewagi nad konkurentami. Dynamicznie zmienne otoczenie generuje zmiany wewnątrz przedsiębiorstw, co w rezultacie wpływa na brak stabilności wewnętrznych struktur złożonego systemu przedsiębiorstwa. Brak stabilności procesów wewnątrz organizacji uniemożliwia ich optymalizację lub znacznie utrudnia jakąkolwiek poprawę efektywności działania [4]. Z drugiej strony brak koncentracji i dostosowania się do zmiennego zapotrzebowania odbiorców (fluktuacji popytu) [5] skutkuje utratę pozycji

na rynku. Dlatego warunkiem sukcesu jest szybkie i efektywne dostosowanie się do zmiennych wymagań otoczenia przy jednoczesnym utrzymaniu założonej stabilności struktury przedsiębiorstwa.

W ramach artykułu analizie został poddany przykładowy układ wytwórczy realizujący procesy dyskretne. Analizy obejmują określenie granic stabilności układów dynamicznie zmiennych, tj. takich dla których parametry procesu wytwórczego, w każdej chwili mogą przyjąć inne wartości. W rozpatrywanym wariacie czasu realizacji zadań definiowane są jako zmienne losowe o zadanych rozkładach, a granice stabilności określone zostały na podstawie wskaźnika zmienności. Założeniem opracowanego modelu jest zastosowanie go dla układów wytwórczych cechujących się dużą customizacją i względnie bardzo wysokim zróżnicowaniem wytwarzanego asortymentu w krótkich (jednostkowych) seriach produkcyjnych. Opracowany model docelowo posłużyć może do opracowania algorytmu dynamicznego sterowania przydziału zadań dla układów o złożonych strukturach wytwórczych.

2. Kształtowanie stabilności

Stabilność układów definiowana jest jako utrzymanie założonej wartości monitorowanej statystyki, względem określonej linii kontrolnej. Występowanie zakłóceń jest nieodłączną cechą dynamicznych systemów, które oddziałują na monitorowaną wartość estymowanego parametru. Układ traci swoją stabilność w wyniku wystąpienia czynnika powodującego trwałe zmiany monitorowanych parametrów. Kształtowanie granic stabilności, czyli wyznaczenie możliwości oddziaływania na estymowaną wartość, definiuje odporność układu na wystąpienie zakłóceń (zarówno wewnętrznych jak również zewnętrznych). Im większy obszar tolerancji, tym większa odporność układu przy jednocześnie dużym prawdopodobieństwie występowania fluktuacji. Im mniejszy zakres tolerancji tym ryzyko wystąpienia stanów niestabilności większe. Dlatego wyznaczenie dolnej i górnej granicy zmienności systemu powinno odbywać się poprzez indywidualny dobór parametrów wejść układu, względem zapewnienia założonych stanów wyjść. Dynamiczne systemy uwzględniają możliwość wystąpienia zmian wartości wielkości monitorowanych względem upływającego czasu. Zatem stabilność systemu produkcyjnego można zdefiniować jako tendencję pozostawania w wyznaczonym stanie lub tendencję do utrzymania odchyień w określonych, z góry dopuszczalnych granicach. W celu wyznaczenia akceptowalnego pola tolerancji dla rozpatrywanego w ramach artykułu układu, przy określaniu stabilności dyskretnych systemów wytwórczych, w pierwszym etapie dokonano estymacji parametrów czasów realizacji zadań produkcyjnych. W rozpatrywanym przypadku uwzględniono wykładniczość pojedynczych czasów realizacji poszczególnych zadań, tak więc każdy pojedynczy czas cyklu jednego zadania wytwórczego $(C/T)_{i,j}$ realizowanego na i – tej maszynie dla $i = 1, 2, \dots, n$ oraz $j = 1, 2, \dots, k_i$. $(C/T)_{i,j}$ jest zmienną losową zgodną z rozkładem wykładniczym:

$$C/T_{i,j} \sim \text{Exp}(\lambda_i) \quad (1)$$

gdzie: λ_i – parametr rozkładu wykładniczego, i – numer rozpatrywanej maszyny, j – numer elementu wykonywany na i – tej maszynie, dla $j = 1, 2, \dots, k_i$.

Lead Time – L/T określający skumulowany czas realizacji zadań wytwórczych zadanych technologią wykonania dla pojedynczego wyrobu finalnego jest sumą zmiennych losowych zgodnych z rozkładem wykładniczym. Zakładam, że dla dowolnych $p, q \in \{1, 2, \dots, n\}$ zachodzi $\lambda_p \neq \lambda_q$. Ponadto jeżeli dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ zachodzi $k_i = 1$, czyli na każdej maszynie wykonywany jest dokładnie jeden element, wówczas funkcja gęstości zmiennej losowej L/T określona jest wzorem:

$$f_{L/T}(t) = \left[\prod_{i=1}^n \lambda_i \right] \cdot \sum_{h=1}^n \frac{e^{-\lambda_h t}}{\prod_{g=1, g \neq h}^n (\lambda_g - \lambda_h)} \quad (2)$$

Wzór (2) zgodny jest ze wzorem (3) jeżeli liczba identycznych elementów wykonywanych na i – tej maszynie równa jest jeden ($k_i = 1$). W ogólnym przypadku gdy $k_i \in \mathbb{N}_+$ wówczas funkcja gęstości zmiennej losowej L/T określona jest wg (3) [2]:

$$f_{L/T}(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{k_i} e^{-t \cdot \lambda_i} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{(-1)^{k_i-j}}{(j-1)!} t^{j-1} \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_n = k_i - j \\ m_i = 0}} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^n \binom{k_l + m_l - 1}{m_l} \frac{\lambda_l^{k_l}}{(\lambda_l - \lambda_i)^{k_l + m_l}} \quad (3)$$

gdzie: $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ oraz $j \in \{1, 2, \dots, k_i\}$: λ_i – parametr rozkładu wykładniczego, k_i – parametr kształtu rozkładu Erlanga, która jednocześnie określa liczbę wykonanych elementów, $m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ – parametry kombinacji takiej, że $m_i = 0$ oraz $\sum_{g=1}^n m_g = k_i - j$.

Dla zależność określonej wzorem (3) został opracowany algorytm umożliwiający zobrazowanie kształtu funkcji $f_{L/T}(t)$ w zależności od liczby wykonywanych elementów k_i . Rysunek 1 przedstawia przykładowe funkcje gęstości zmiennej L/T .



Rys. 1. Przykładowe funkcje gęstości zmiennej losowej L/T

Z przedstawionych wykresów wynika, że w rozpatrywanym układzie występuje zmienność. Zmiany wartości k_i , określające liczbę wykonywanych elementów na j – tym obiekcie i/lub zmiany wartości λ_i bezpośrednio związanej z czasem realizacji pojedynczego zadania wpływają na zmianę wartości zmiennej losowej L/T . Zmienna wartość oczekiwana oraz odchylenie standardowe wynikają ze zmian parametrów k_i

oraz λ_i . Pierwsze analizy obejmowały wyznaczenie wartości prawdopodobieństwa, że zmienna losowa L/T mieści się w granicach ± 3 odchyłeń standardowych ($\pm 3 D(L/T)$) w zależności od liczby wytwarzanych produktów k_i na j -tej maszynie. Prawdopodobieństwo to wynosiło: 98,2 % dla 1 szt.; 99,3 % dla 10 szt. oraz 99,9 % dla 250 szt. [7]. Jednak odchylenie standardowe jako wartość deterministyczna określa bezwzględne różnicowanie cechy, dlatego w kolejnym etapie występującą zmienność przeanalizowano jako wielkości zależne od wartości oczekiwanej zmiennej losowej $C/T_{i,j}$. Kolejne badania obejmowały analizy zmienności względnej na podstawie współczynnika zmienności będącego klasyczną miarą różnicowania cechy określonej jako stosunek odchylenia standardowego względem wartości oczekiwanej. W analizach zmienności posłużono się ujęciem kompleksowym zgodnym z teorią systemów złożonych i wynikających z tej teorii ścisłych współzależności pomiędzy pojedynczymi stacjami wytwórczymi a całą strukturą systemów produkcyjnych. Na tej podstawie dokonano analiz jak duża część wartości oczekiwanej zmiennej losowej $C/T_{i,j}$ stanowi odchylenie standardowe zmiennej losowej L/T oraz odpowiednio jak duża część wartości oczekiwanej zmiennej L/T stanowi odchylenie zmiennej $C/T_{i,j}$. Analizy zostały przeprowadzone dla dwóch wskaźników: V_i oraz V_i^* zgodnie z (4) i (5):

$$V_i = \frac{D(C/T_{i,j})}{E(L/T)} \quad (4)$$

$$V_i^* = \frac{D(L/T)}{E(C/T_{i,j})} \quad (5)$$

gdzie: $D(C/T_{i,j})$ – odchylenie standardowe zmiennej losowej $C/T_{i,j}$; $E(C/T_{i,j})$ – wartość oczekiwana zmiennej losowej $C/T_{i,j}$; $D(L/T)$ – odchylenie standardowe zmiennej losowej L/T ; $E(L/T)$ – wartość oczekiwana zmiennej losowej L/T .

Na podstawie danych empirycznych czasów realizacji zadań produkcyjnych przykładowego systemu wytwórczego cechującego się względnie wysokim stopniem różnicowania asortymentowego, dokonano porównania wskaźników zmienności V_i i V_i^* . Analizy porównawcze wskaźników wykazały, że wraz ze wzrostem wskaźnika V_i maleje wskaźnik zmienności V_i^* – i odwrotnie, wraz ze wzrostem V_i^* maleje V_i . Jest to rezultat wykluczających się zależności parametru λ_i oraz liczby wykonywanych elementów k_i w poszczególnych procesach. Analizy wykazały, że nie jest możliwe uzyskanie wartości zmienności V_i i V_i^* jednocześnie zbliżonych do zera [6]. W kolejnym etapie dokonano wyznaczenia optymalnych parametrów λ_i oraz k_i gwarantujących stabilność wskaźników zmienności V_i i V_i^* . Rozpatrzono następujący układ parametrów:

$$\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad (6)$$

$$\vec{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n) \quad (7)$$

Aby uzyskać stabilność układu należy zagwarantować stały w określonych granicach poziom zmienności wszystkich poszczególnych maszyn, na których przetwarzana jest różna liczba elementów. Zdefiniowanie dolnej akceptowalnej granicy V_{min}^* oraz górnej akceptowalnej granicy V_{max}^* określone zostało na podstawie wzorów (8) i (9), gdzie za

akceptowalną granicę zmienności zostały przyjęte wartości pierwszego i trzeciego kwartyla dla zbioru $E(C/T_{i,j})$. Stąd:

$$V_{min}^* = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{k_i}{\lambda_i^2}}}{3Q_{WIP}} \quad (8)$$

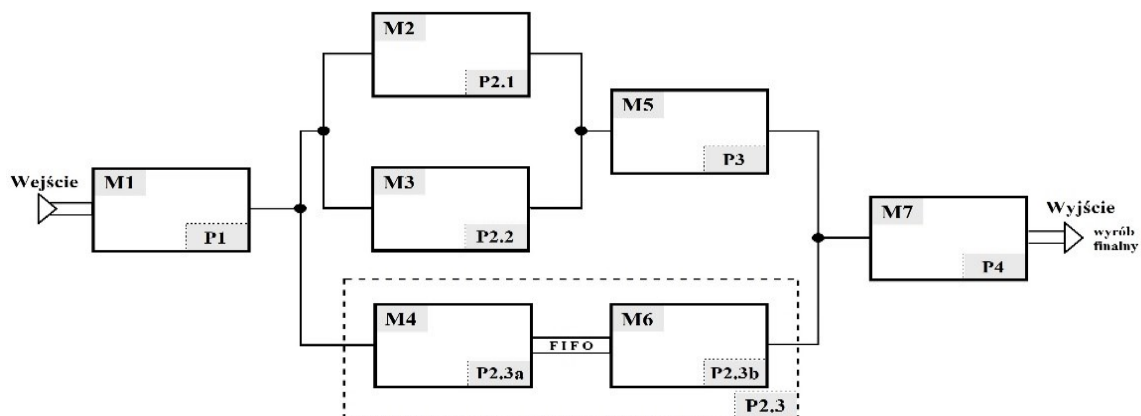
$$V_{max}^* = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{k_i}{\lambda_i^2}}}{1Q_{WIP}} \quad (9)$$

gdzie: $1Q$ – pierwszy kwartył ze zbioru danych $E(C/T_{i,j})$, $3Q$ – trzeci kwartył ze zbioru danych $E(C/T_{i,j})$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, k_i$;

Ze względu na ścisłe współzależności pomiędzy wskaźnikami: V_i^* $\forall i = 1, 2, \dots, n$ zmiana jednego czasu realizacji zadań produkcyjnych, determinuje zmianę pozostałych V_r^* dla $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ oraz $r \neq i$. Dlatego kolejne analizy dotyczą wyznaczenia zależności wpływów zmian parametrów k_i i λ_i na wskaźnik zmienności V_i^* oraz określenia jednoczesnego wpływu zmian parametrów k_i i λ_i na pozostałe wskaźniki zmienności – V_r^* .

2.1. Analiza zmienności układu szeregowo równoległego

Analizie został poddany układ szeregowo równoległy, którego schemat przedstawiono na rysunku 2; gdzie: M_i – określa numer maszyny dla $i = 1, 2, \dots, 7$ oraz przez $P_{\check{r}, \check{s}}$ – określony zostaje numer procesu realizowanego na maszynie M_i dla $\check{r}, \check{s} \in \{1, 2.1, 2.2, 2.3, 3, 4\}$



Rys. 2. Obiekt optymalizacji

Średnie czasy realizacji k_i zadań zostały tak ustalone aby analizowana wydajność całego układu była równa jeden w określonym czasie (wykres wydajności rys.4). Dla schematu przedstawionego na rysunku 1 został opracowany harmonogram przydziału zadań na poszczególne maszyny M_i tak aby na wyjściu rozpatrywanego

układu uzyskać produktywność równą siedem przy wydajności maszyny M7 równej jeden dla ściśle określonej jednostki czasu. Analizie został poddany układ, którego harmonogram przydziału zadań na poszczególne maszyny M_i przedstawiony został na rysunku 3.

W tabeli 1 zostały przedstawione wartości parametrów, dla których wykonano analizy, gdzie: M_i – numer maszyny, k_i – liczba przetwarzanych elementów na i -tej maszynie, λ_i – parametr rozkładu dla pojedynczego czasu realizacji j -tego zadania na i -tej maszynie, $E(C/T_{i,j})$ – wartość oczekiwana czasu taktu $C/T_{i,j}$ na i -tej stacji wytwórczej (maszynie), $D(C/T_{i,j})$ – odchylenie standardowe czasu taktu $C/T_{i,j}$ na i -tej stacji wytwórczej (maszynie), V_i^* oraz V_i – wskaźniki zmienności dla poszczególnej maszyny wyznaczone na podstawie wzorów: (4) oraz (5).

														k_i
M7						Z_2	Z_1	Z_4	Z_3	Z_6	Z_5	Z_7		7
M6				Z_2		Z_4		Z_6		Z_7				4
M5					Z_1		Z_3		Z_5					3
M4			Z_2		Z_4		Z_6		Z_7					4
M3			Z_1			Z_5								2
M2				Z_3										1
M1	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Z_7							7

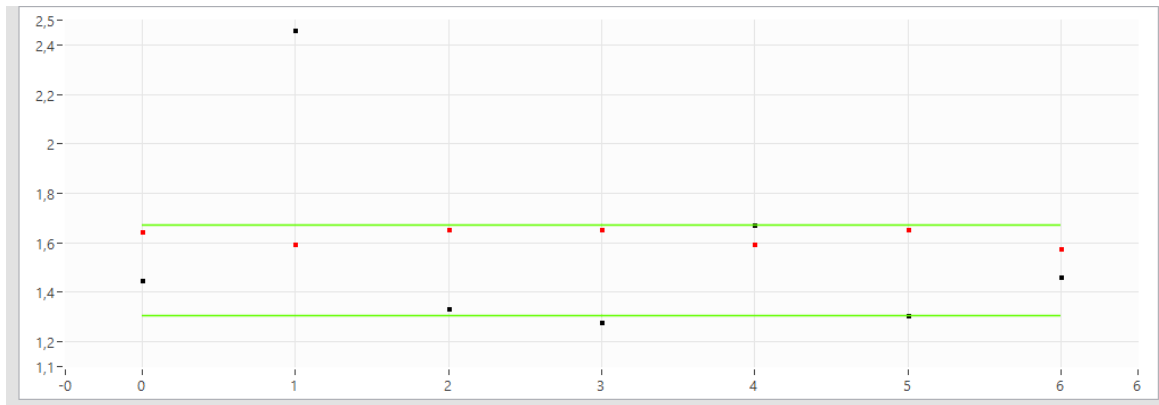
Rys. 3. Analizowany harmonogram przydziału zadań na maszyny M_i

Tabela 1

Parametry analizowanych danych

Lp.	M_i	k_i [sz.]	λ_i	$E(C/T_{i,j})$	$D(C/T_{i,j})$	V_i^*	V_i
1	M_1	7	0,99	7,07	2,67	1,45	0,06
2	M_2	1	0,24	4,19	4,17	2,46	0,09
3	M_3	2	0,26	7,69	5,44	1,33	0,11
4	M_4	4	0,5	8,00	4,00	1,28	0,08
5	M_5	3	0,49	4,12	3,53	1,67	0,07
6	M_6	4	0,51	7,84	3,92	1,31	0,08
7	M_7	7	1	7,00	2,65	1,46	0,06

Dla danych przedstawionych w tabeli 1 wykonano algorytm, który w postaci wykresu (rys. 4) przedstawia wartości wskaźników V_i^* dla poszczególnej maszyny – czarne kropki. Następnie dokonano zmian jedynie wartości parametrów λ_i tak aby „nowe” wartości wskaźników zmienności \bar{V}_i^* dla każdej maszyny mieściły się w granicach V_{min}^* – określonej wg wzoru (8) oraz V_{max}^* – określonej wg wzoru (9) – kropki czerwone.

Rys. 4. Wykres wartości wskaźników V_i^* , \bar{V}_i^* oraz V_r^* i \bar{V}_r^*

Zmiany wartości parametrów λ_i oraz zmiana liczby zadań wytwórczych k_i przydzielonych na i – tą stacją produkcyjną wpływają na zmianę wartości wskaźników V_i^* i jednocześnie zmiany wskaźnika V_r^* . Zwiększenie parametru λ_i powoduje nieproporcjonalne zwiększenie wartości V_i^* względem wskaźników zmienności V_r^* . Identycznie nieproporcjonalna zmiana występuje w odwrotnej sytuacji: zmniejszenie λ_i powoduje zwiększenie V_r^* przy jednoczesnym dużo większym zmniejszeniu V_i^* . Zmiana poprzez zwiększenie liczby przydzielonych zadań k_i na maszynę M_i wpływa na znaczne zmniejszenie wskaźnika V_i^* oraz jednocześnie nieproporcjonalne względem V_i^* zwiększenie V_r^* .

3. Rezultaty

Na podstawie przeprowadzonych analiz rozpatrywanego układu wynika, że istnieje ścisła nieproporcjonalna zależność pomiędzy V_i^* a V_r^* przy zmianie parametrów k_i i λ_i . W dalszej części artykułu dokonano określenia wpływu zależności wynikającej ze zmian k_i oraz λ_i . Analizy dotyczą jedynie wskaźnika V_i^* i V_r^* . Stąd dla ustalonego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ „początkowy” wskaźnik zmienności \bar{V}_i^* (wartość przed wprowadzeniem zmian) oraz dla ustalonego $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ oraz $r \neq i$ – \bar{V}_r^* wartość wskaźnika przed wprowadzeniem zmian, określone są wzorami:

$$\bar{V}_i^* = \frac{\sqrt{\sum_{l=1}^n \frac{k_l}{\lambda_l^2}}}{\frac{k_i}{\lambda_i}} \quad (10)$$

Wzór (10) zdefiniowany został na podstawie wzoru (4) zastosowanego do zmiennej losowej o rozkładzie określonej gęstością zgodną ze wzorem (3).

- a) Dokonując zmiany parametru λ_i otrzymując $\check{\lambda}_i$ wówczas dla dowolnego $r \in \{1, 2, \dots, n\}$, $r \neq i$ otrzymujemy:

$$\bar{V}_r^* = \frac{\sqrt{\left(\sum_{l=1, l \neq i}^n \frac{k_l}{\lambda_l^2}\right) + \frac{k_i}{\check{\lambda}_i^2}}}{\frac{k_r}{\lambda_r}} \quad (11)$$

Wniosek: zmiana i – tego parametru λ_i powoduje zmianę wartości pozostałych wskaźników \bar{V}_r^* (wskaźnik \bar{V}_i^* ty też się zmienia), czyli wszystkie wskaźniki zmieniają swoje wartości.

- b) Dokonując pewnej zmiany parametru k_i tj. liczby elementów realizowanych na maszynie M_i otrzymując \bar{k}_i , wówczas dla dowolnego $r \in \{1, 2, \dots, n\}$, $r \neq i$:

$$\bar{V}_r^* = \frac{\sqrt{\left(\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^n \frac{k_l}{\lambda_l^2}\right) + \frac{\bar{k}_i}{\lambda_i^2}}}{\frac{k_r}{\lambda_r}} \quad (12)$$

Wniosek: zmiana i – tego parametru k_i powoduje zmianę wartości pozostałych wskaźników \bar{V}_r^* (wskaźnik \bar{V}_i^* też się zmienia), czyli wszystkie wskaźniki zmieniają swoje wartości.

4. Podsumowanie

W celu stabilizacji zmienności złożonej struktury produkcyjnej w z góry określonych granicach powinno odbywać się przy kontrolowanym sterowaniu czasów realizacji zadań na stacjach produkcyjnych i jednoczesnym kontrolowanym przydziale liczby zadań na każde pojedyncze stanowisko. Określenie dolnej V_{min}^* i górnej V_{max}^* granicy zmienności stanów analizowanego układu na podstawie wzorów (8) oraz (9) wyznacza granicę stabilności układu względem zadanych parametrów wejściowych w ściśle określonej jednostce czasu, tj. dla dyskretnych okresów skończonego horyzontu planowania [1]. Wyznaczenie granic: V_{min}^* i V_{max}^* dla Δt odbywa się na podstawie parametrów jakie występują w układzie dla danej chwili. Kształtowanie stabilności układu dla $\Delta t + \tau$ gdzie $\tau = 1, 2, \dots$ uwzględnić powinno zmienność przydziału liczby zadań na poszczególną stację wytwórczą oraz zmienność czasów realizacji dla zbioru przydzielonych zadań. Z postaci wzorów: (10), (11) i (12) wynika, że każda zmiana parametrów λ_i oraz k_i wywołuje większą zmianę wskaźnika \bar{V}_i^* niż zmianę wskaźnika \bar{V}_r^* . Dlatego dalsze analizy kształtowania zmienności dynamicznych układów wytwórczych realizujących procesy dyskretne dotyczyć będą procentowych zmian kształtowania granic zmienności V_{min}^* i V_{max}^* dla następujących przypadków: zmiana parametru λ_i o wartość \mathbf{p} , zmiana parametru λ_i \mathbf{p} razy, zmiana liczby zadań k_i o liczbę \mathbf{s} , zmiana liczby zadań k_i \mathbf{s} razy.

LITERATURA

1. Helber S., Inderfurth K., Sahling F., Schimmelpfeng K.: Flexible versus robust lot-scheduling subject to random production yield and deterministic dynamic demand. *IIE Transactions*, vol.50(3), 2018, p. 217-229
2. Jasiulewicz H., Kordecki W., Convolutions of Erlang and Pascal distributions with applications to reliability, *Demonstratio Mathematica*, vol.36(1), 2003, p. 231-238

3. Qamar A., Hall M.A., Collinson S.: Lean versus agile production: flexibility trade-offs within the automotive supply chain. *International Journal of Production Research*, 2018, Pub. on-line: <https://doi.org/10.1080/00207543.2018.1463109>.
4. Zeppetella L., Gebennini E., Grassi A., Rimini B.: Optimal production scheduling with customer-driven demand substitution. *International Journal of Production Research*, vol.55(6), 2017, p. 1692-1706.
5. Zhao C., Kang N., Li J., Horst J.A.: Production Control to Reduce Starvation in a Partially Flexible Production-Inventory System. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.63(2), 2018, p. 477-491.
6. Zwolińska B., Grzybowska K., Kubica Ł.: Shaping production change variability in relation to the utilized technology. 24th International Conference on Production Research (ICPR2017) On-line access: <http://dpi-proceedings.com/index.php/dtetr/article/view/17582>.
7. Zwolińska B., Kubica Ł.: Forming of the dynamics of the changes in convergent production system depending on size of production party. *LogForum*, vol.13(3), 2017, p. 301-311.