

Marek MAGIERA  
AGH Akademia Górniczo-Hutnicza

## **MONOLITYCZNA METODA HARMONOGRAMOWANIA PRZEPIYWÓW WIELOWARIANTOWYCH PRODUKTÓW PRZEZ LINIE PRODUKCYJNE BEZ BUFORÓW MIĘDZYOPERACYJNYCH**

**Streszczenie.** Metoda służy do budowy harmonogramów produkcji w liniach produkcyjnych z maszynami równoległymi, które nie są wyposażone w bufory międzyoperacyjne. W jednopoziomowym podejściu do budowy tych harmonogramów dotyczących wielowariantowych produktów zastosowano programowanie całkowitoliczbowe. Uwzględniono i porównano za pomocą eksperymentów obliczeniowych dwa przypadki organizacji przepływów produktów: możliwość pełnienia roli buforów przez maszyny oraz szeregowanie „bez czekania”.

## **A MONOLITHIC SCHEDULING METHOD FOR MULTI-OPTION PRODUCT FLOWS THROUGH PRODUCTION LINES WITHOUT INTERMEDIATE BUFFERS**

**Summary.** The method is constructed for scheduling in production lines with parallel machines and without intermediate buffers. The one-level approach to scheduling for multi-option products is presented. The integer programming is used in the method. The possibility of blocking machines by products and no-wait scheduling are regarded in the presented results of computational experiments.

### **1. Wprowadzenie**

Zastosowanie podejścia monolitycznego do budowy harmonogramu produkcji, co jest tematem niniejszego artykułu, skutkuje koniecznością równoczesnego uwzględnienia wszystkich danych wejściowych. Problemy rozwiązywane za pomocą jednopoziomowego podejścia (czyli monolitycznego) często charakteryzują się znacznymi rozmiarami. Rozmiar rozwiązywanego problemu, stanowiący liczbę całkowitą będącą miarą ilości danych wejściowych, ma natomiast istotny wpływ na złożoność obliczeniową – pamięciową oraz czasową [1]. Jednakże rozwój techniki komputerowej i oprogramowania umożliwia rozwiązywanie problemów o coraz większych rozmiarach.

Zaproponowana w artykule monolityczna metoda ma istotną zaletę – umożliwia budowę najkrótszych (optymalnych) harmonogramów przepływów różnych typów produktów przez linie produkcyjne. Zostało to osiągnięte nie tylko dzięki

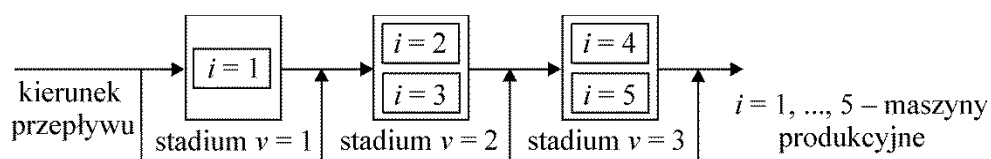
zastosowaniu podejścia monolitycznego, ale również jest to skutkiem zastosowania programowania całkowitoliczbowego.

Kolejną zaletą metody jest dedykowanie jej produktom wielowariantowym. Produkt wielowariantowy charakteryzuje się tym, że poszczególne sztuki produktu określonego typu (warianty) różnią się detalami, np. dodatkową obróbką wykańczającą, dodatkowymi uchwytami, różnicami w gabarytach. Uwzględnienie takich produktów to odpowiedź na wymagania stawiane przez rynek charakteryzujący się znaczną konkurencyjnością. Sprostaniem tej konkurencyjności jest m.in. wzięcie pod uwagę indywidualnych wymagań odbiorców. Zbudowana struktura danych dotyczy wielowariantowych produktów. W strukturze tej wyróżniono m.in. operacje wspólne wykonywane dla tych produktów oraz operacje wyróżniające te produkty. Wyróżnienie tych zbiorów, a także przedstawiona w dalszej części koncepcja zapisu ograniczeń kolejnościowych korzystnie wpływają na złożoność obliczeniową.

Alternatywnym podejściem do budowy harmonogramu produkcji jest koncepcja hierarchiczna – np. najpierw dokonywany jest rozdział operacji w przestrzeni (przydział do maszyn lub tylko do stadiów), a następnie dokonywany jest rozdział operacji w czasie. Przykład metody opartej na tej koncepcji dotyczącej produktów wielowariantowych zamieszczony jest w pracy [3]. Wielopoziomowe podejście do rozwiązania zadania skutkuje oczywiście mniejszymi rozmiarami problemów rozwiązywanych na poszczególnych poziomach metody oraz obciążeniem rozwiązania pewną odchyłką od optimum. Ta niekorzystna cecha metod hierarchicznych przyczyniła się do budowy metody monolitycznej, którą ogólnie opisano w następnym rozdziale. W rozdziale 3 zamieszczono matematyczny opis metody, a rozdział 4 poświęcony jest przedstawieniu wyników eksperymentów obliczeniowych.

## 2. Ogólny opis problemu i metody monolitycznej

Metoda dotyczy hybrydowych linii produkcyjnych, czyli wyposażonych w maszyny równoległe. Każde stadium stanowi zbiór maszyn pracujących równoległe. Przykład konfiguracji takiej linii zamieszczono na rysunku 1. Problematyka dotycząca budowy harmonogramów produkcji dotyczących linii produkcyjnych z maszynami równoległymi jest obszernie przedstawiona m.in. w pracach [1] i [6].



Rys. 1. Przykładowa linia produkcyjna bez buforów międzyoperacyjnych

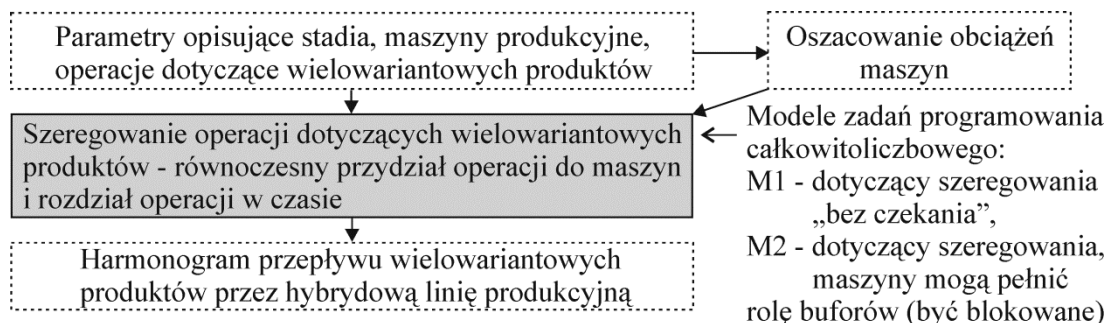
W opisanej linii produkcyjnej należy wykonać równocześnie operacje dotyczące wielowariantowych produktów różnych typów. W związku z tym, że linia nie jest wyposażona w bufory międzyoperacyjne, należy uwzględnić dwa przypadki:

- szeregowanie „bez czekania” – przerwy pomiędzy operacjami przeznaczone są wyłącznie na transport produktów pomiędzy maszynami należącymi do różnych stadiów;

- możliwość blokowania maszyn przez produkty oczekujące na wykonanie kolejnych operacji – maszyny mogą pełnić rolę buforów (lokalnych magazynów).

W obu przypadkach przepływ produktów jest jednokierunkowy. Każdy produkt obciąża co najwyżej jedną maszynę danego stadium. Niektóre stadia mogą być pominięte. Należy zbudować jak najkrótsze harmonogramy produkcji uwzględniające: konfigurację parku maszynowego, możliwości produkcyjne maszyn oraz ograniczenia dotyczące kolejności wykonywania operacji przypisanych poszczególnym wielowariantowym produktom. Harmonogramy należy zbudować dla alternatywnych marszrut produkcyjnych, co oznacza, że operacje danego typu dotyczące różnych produktów wielowariantowych nie muszą być wykonywane na tej samej maszynie – przydzielone mogą być do różnych maszyn zdolnych do wykonania tych operacji.

W celu rozwiązania opisanego zadania proponowane jest zastosowanie monolitycznej metody, której dotyczą dwa modele zadań programowania całkowitoliczbowego. Oznaczenia tych modeli i schemat blokowy metody zamieszczono na rysunku 2.



Rys. 2. Schemat blokowy monolitycznej metody i oznaczenia modeli matematycznych

Do cech charakterystycznych metody należy uwzględnienie ograniczonej dostępności maszyn i związany z tym podział szacowanej długości harmonogramu na przedziały czasowe. W pracy [3] opisana jest procedura oszacowania długości uszeregowania operacji wykonywanych w przypadku wielowariantowych produktów, opracowana przez autora niniejszego artykułu. Modele matematyczne dotyczące metody zaprezentowano w następnym rozdziale.

### 3. Matematyczny opis metody

W tabeli 1 zestawiono oznaczenia parametrów i zmiennych dotyczących modeli matematycznych uwzględniających jednopoziomowe podejście do budowy harmonogramów produkcji wielowariantowych produktów. Aspekt produktów wytwarzanych w różnych wariantach jest widoczny w opisie zdefiniowanych zbiorów i parametrów. Operacje dodatkowe, dotyczące poszczególnych wariantów produktów określonych typów wyszczególnione są w zbiorze  $O^2$ . Natomiast operacje dotyczące wszystkich produktów określonego typu, nazwane operacjami podstawowymi, zestawione są w zbiorze  $O^1$ . W podobny sposób rozróżniono dwa zbiory dotyczące ograniczeń kolejnościowych: zbiór  $R^1$  opisuje kolejność wykonywania operacji podstawowych, a zbiór  $R^2$  uwzględnia operacje wyróżniające produkty, nadające im wyróżniające je cechy, dzięki którym produkty te określane są jako wielowariantowe.

Tabela 1

Zestawienie oznaczeń zbiorów, parametrów i zmiennych

---

**Podstawowe zbiory:**

$I$  – zbiór maszyn:  $I = \{1, \dots, M\}$ ;  
 $J$  – zbiór typów operacji:  $J = \{1, \dots, N\}$ ;  
 $K$  – zbiór typów produktów:  $K = \{1, \dots, Z\}$ ;  
 $L$  – zbiór przedziałów czasowych:  $L = \{1, \dots, H\}$ ;  
 $S$  – zbiór indeksów produktów:  $S = \{1, \dots, U\}$ ;  
 $V$  – zbiór stadiów:  $V = \{1, \dots, A\}$ ;

**Pozostałe zbiory:**

$D$  – zbiór par  $(i, v)$ , w przypadku których maszyna  $i$  należy do stadium  $v$ ;  
 $J^1$  – zbiór operacji podstawowych,  $J^1 \subset J$ ;  
 $J^2$  – zbiór operacji dodatkowych (wyróżniających produkty),  $J^2 \subset J$ ;  
 $O^1$  – zbiór par  $(k, j)$ , w przypadku których operacja podstawowa  $j \in J^1$  dotyczy produktu typu  $k \in K$ ;  
 $O^2$  – zbiór par  $(s, j)$ , w których operacja dodatkowa  $j \in J^2$  dotyczy produktu  $s \in S$ ;  
 $R^1$  – zbiór uporządkowanych trójek  $(k, r, j)$ , w przypadku których kolejno wykonywane operacje podstawowe  $r, j \in J^1$  dotyczą produktu typu  $k$ ;  
 $R^2$  – zbiór trójek  $(s, r, j)$ , w przypadku których kolejno wykonywane operacje  $r, j$  dotyczą produktu  $s$ ;  
 $T$  – zbiór par  $(s, k)$ , w przypadku których produkt o indeksie  $s$  jest typu  $k$ ;  
 $V_j$  – zbiór stadiów, zawierających maszyny zdadne do wykonania operacji  $j \in J$ ;

**Parametry:**

$g_{ev}$  – czas transportu produktu typu  $k$  pomiędzy stadiami:  $e, v$ ;  
 $n_{il} = 1$ , jeżeli maszyna  $i$  jest dostępna w przedziale czasowym  $l$ , inaczej  $n_{il} = 0$ ;  
 $p_{jk}^1$  – czas wykonywania operacji podstawowej  $j \in J^1$  dotyczącej produktu typu  $k$ ;  
 $p_{js}^2$  – czas wykonywania operacji dodatkowej  $j \in J^2$  dotyczącej produktu  $s$ ;

---

**Zmienne:**

$x_{ijsl} = 1$ , jeżeli w przedziale czasowym  $l$  maszyna  $i$  wykonuje operację typu  $j$  dotyczącą produktu  $s$ , inaczej  $x_{ijsl} = 0$ ;

Zmienne dotyczące wyłącznie modelu M2:

$w_{is}$  – czas rozpoczęcia wykonywania operacji dla produktu  $s$  na maszynie  $i$ ;  
 $z_{is}$  – czas zakończenia wykonywania operacji dla produktu  $s$  na maszynie  $i$ ;  
 $y_{isl} = 1$ , jeżeli w przedziale czasowym  $l$  maszyna  $i$  pełni rolę bufora dla produktu  $s$ ,  
inaczej  $y_{isl} = 0$ ;

---

Oto modele matematyczne M1 i M2:

$$\text{Zminimalizować:} \quad \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{s \in S} \sum_{l \in L} l x_{ijsl} \quad (1)$$

$$\text{przy ograniczeniach:} \quad \sum_{j \in J} \sum_{s \in S} x_{ijsl} \leq n_{il}; \quad i \in I; l \in L \quad (2)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ijsl} \leq 1; \quad l \in L; s \in S \quad (3)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{l \in L: n_{il}=1} x_{ijsl} = p_{jk}^1; \quad j \in J^1; (s, k) \in T; (k, j) \in O^1 \quad (4)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{l \in L: n_{il}=1} x_{ijsl} = p_{js}^2; \quad j \in J^2; s \in S; (s, j) \in O^2 \quad (5)$$

$$x_{\tau s f} + x_{ijsl} \leq 1; \quad (\tau, v), (i, v) \in D; r, j \in J; f, l \in L; s \in S; r \neq j; \tau \neq i \quad (6)$$

$$ix_{ijsl} \geq \tau x_{\tau s f} - (H+1)(1 - x_{ijsl}); \quad i, \tau \in I; (s, k) \in T; l, f \in L; (k, r, j) \in R^1 \vee (s, r, j) \in R^2 \quad (7)$$

$$lx_{ijsl} - fx_{\tau s f} \geq 1 + g_{ev} - (H+1)(1 - x_{ijsl});$$

$$(i, v), (\tau, e) \in D; f, l \in L; ((s, k) \in T; (\kappa, r, j) \in R^1; \kappa = k) \vee (s, r, j) \in R^2 \quad (9)$$

$$x_{ijsl} = 0; \quad (i, v) \in D; v \notin V_j; j \in J; l \in L; s \in S \quad (9)$$

$$x_{ijsl} \in \{0, 1\} \quad i \in I; j \in J; l \in L; s \in S; \quad (10)$$

- Tylko w przypadku modelu M1 (dotyczącego szeregowania „bez czekania”):

$$lx_{ijsl} - fx_{irsf} - 1 \leq g_{ev} \sum_{q \in L: f < q < l} (x_{ijsq} + x_{irsq}) + (H+1)(1 - x_{ijsl});$$

$$(s, k) \in T; (i, v), (\tau, e) \in D; l, f \in L; f < l; (k, r, j) \in R^1 \vee (s, r, j) \in R^2 \quad (11)$$

- Tylko w przypadku modelu M2 (maszyny mogą pełnić rolę buforów):

$$lx_{ijsl} - fx_{irsf} - 1 \leq \sum_{q \in L: f < q < l} (x_{ijsq} + x_{irsq}) + (H+1)(1 - x_{ijsl});$$

$$(s, k) \in T; i \in I; l, f \in L; f < l; (k, r, j) \in R^1 \vee (s, r, j) \in R^2 \quad (12)$$

$$lx_{ijsl} - fx_{\tau s f} - 1 \leq g_{ev} + \sum_{q \in L: f < q < l} (x_{ijsq} + x_{\tau sq}) + \sum_{q \in L} y_{\tau sq} + (H+1)(1 - x_{\tau s f}); \quad l, f \in L; f < l;$$

$$(i, v), (\tau, e) \in D; e < v; ((s, k) \in T; (\kappa, r, j) \in R^1; \kappa = k) \vee (s, r, j) \in R^2 \quad (13)$$

$$w_{is} \geq lx_{ijsl} - \sum_{f \in L: r \in J} x_{irsf} + 1 - (H+1)(1 - x_{ijsl}); \quad i \in I; j \in J; l \in L; s \in S \quad (14)$$

$$w_{is} \leq lx_{ijsl} + (H+1)(1 - x_{ijsl}); \quad i \in I; j \in J; l \in L; s \in S \quad (15)$$

$$z_{is} \geq lx_{ijsl} - (H+1)(1 - x_{ijsl}); \quad i \in I; j \in J; l \in L; s \in S \quad (16)$$

$$ly_{\tau sl} \leq w_{is} - g_{ev} - 1 + (H+1)(1 - y_{\tau sl}); \quad (\tau, e), (i, v) \in D; e < v; l \in L; s \in S \quad (17)$$

$$ly_{\tau sl} \geq z_{\tau s} + 1 - (H+1)(1 - y_{\tau sl}); \quad (\tau, e) \in D; v \in V; e < v; l \in L; s \in S; \quad (18)$$

$$\sum_{s \in S} (x_{ijsl} + y_{isl}) \leq 1; \quad i \in I; j \in J; l \in L; \quad (19)$$

$$y_{isl} \in \{0, 1\}, \quad w_{is}, z_{is} \geq 0; \quad i \in I; l \in L; s \in S; \quad (20)$$

Minimalizacja wartości sumy (1) dotyczącej modeli M1 i M2 zapewnia wyznaczenie najkrótszych harmonogramów przepływów wielowariantowych produktów przez hybrydową linię produkcyjną. Ograniczenia przyporządkowane tym modelom zapewniają: (2) – wykonywanie przez każdą maszynę co najwyżej jednej operacji w danej chwili – w okresie udostępnienia tej maszyny do wykonywania operacji; (3) – wykonywanie w danej chwili co najwyżej jednej operacji dotyczącej określonego produktu; (4) i (5) – rozdział wszystkich operacji podstawowych (4) oraz dodatkowych

(5) pomiędzy maszyny udostępnione do wykonywania zadań; (6) – obciążenie co najwyżej jednej maszyny danego stadium przez dany produkt – niepodzielność operacji pomiędzy maszyny; (7) – jednokierunkowy przepływ produktów; (8) – uwzględnienie ograniczeń dotyczących kolejności wykonywania podstawowych i dodatkowych (np. wykańczających) operacji; (9) – wyeliminowanie przydziałów operacji do niewłaściwych maszyn (uwzględnienie możliwości produkcyjnych maszyn); (10) – binarność zmiennych decyzyjnych.

Kolejne ograniczenie (11) dotyczy wyłącznie modelu M1. Zapewnia ono nie tylko szeregowanie „bez czekania” (przerwy pomiędzy wykonywaniem operacji na maszynach przeznaczone są wyłącznie na transport produktu), ale również ciągłość wykonywania poszczególnych operacji. Ponadto dzięki temu ograniczeniu wykonywanie operacji dotyczące określonego produktu, które są wykonywane na jednej maszynie, nie są rozdzielone innymi operacjami, przypisanymi innym produktom.

Ostatnie ograniczenia dotyczą modelu M2 i zapewniają: (12) – ciągłość wykonywania na danej maszynie operacji dotyczących określonego produktu – podobnie jak w przypadku ograniczenia (11); (13) – wyznaczenie liczby przedziałów czasowych, w których poszczególne maszyny pełnią rolę buforów dla określonych produktów; (14)–(16) – wyznaczenie czasów rozpoczęcia oraz zakończenia operacji dotyczących poszczególnych produktów na danych maszynach (jeżeli produkt  $s$  nie obciąża maszyny  $i$ , to wartości zmiennych  $w_{is} = z_{is} = 0$ ); (17) – blokowanie maszyny przez produkt (pełnienie roli bufora) przed wykonaniem następnej operacji i przed transportem do kolejnego stadium; (18) – blokowanie maszyny przez produkt bezpośrednio po zakończeniu wykonywania na niej operacji dotyczących tego produktu; (19) – brak możliwości pełnienia roli bufora przez maszynę, w czasie, w którym wykonywana jest operacja na tej maszynie; (20) – odpowiednie typy zmiennych.

#### 4. Eksperymenty obliczeniowe

Przeprowadzone eksperymenty obliczeniowe miały na celu m.in. weryfikację zaprezentowanych modeli matematycznych. Do obliczeń wykorzystano Gurobi (optimizer) [8]. Eksperymenty objęły 4 grupy zadań, a w przypadku każdej z grup rozwiązano 25 przykładów testowych. Dokonano także porównań długości harmonogramów wyznaczanych w oparciu o wykorzystanie modeli M1 i M2. Porównano również czasy obliczeń. W przypadku budowy harmonogramów dotyczących szeregowania „bez czekania” porównano także harmonogramy wyznaczone w oparciu o podejście monolityczne (w którym wykorzystano model M1) oraz harmonogramy budowane wykorzystując hierarchiczną metodę zaprezentowaną w pracy [3] – po modyfikacji tej metody polegającej na usunięciu ograniczeń dotyczących buforów międzyoperacyjnych i dodaniu ograniczenia zapewniającego szeregowanie „bez czekania”, odpowiednika ograniczenia (11). Poniżej zdefiniowano wskaźniki przeznaczone do porównań, a parametry grup zadań testowych i wyniki eksperymentów obliczeniowych zestawiono w tabeli 2. Długość każdego z harmonogramów  $C_{\max}$  została wyznaczona na podstawie równania (21). W równaniach (22) zdefiniowano wskaźniki dotyczące porównania modeli M1 i M2. Wskaźnik  $d_1$  przeznaczony jest do porównania długości wyznaczonych harmonogramów, a wskaźnik  $t_1$  dotyczy porównania czasów obliczeń ( $CPU^M$  – czas obliczeń w przypadku zastosowania modelu M). W analogiczny sposób

zdefiniowano w równaniach (23) wskaźniki  $d_2$  i  $d_3$  dotyczące porównania metod opartych na koncepcji monolitycznej (M1) i hierarchicznej (H) opisanej w pracy [3].

$$C_{\max}^M = \max_{i \in I, j \in J, l \in L, s \in S} l x_{ijsl} \quad - \text{w przypadku modelu M} \quad (21)$$

$$d_1 = \frac{C_{\max}^{M1} - C_{\max}^{M2}}{C_{\max}^{M2}} \cdot 100\%; \quad t_1 = \frac{CPU^{M1} - CPU^{M2}}{CPU^{M2}} \cdot 100\% \quad (22)$$

$$d_2 = \frac{C_{\max}^H - C_{\max}^{M1}}{C_{\max}^{M1}} \cdot 100\%; \quad t_2 = \frac{CPU^H - CPU^{M1}}{CPU^{M1}} \cdot 100\% \quad (23)$$

Tabela 2

Parametry grup zadań testowych i wyniki eksperymentów

Grupa zadań	Parametry grupy zadań						Wyniki eksperymentów obliczeniowych			
	<i>A</i>	<i>M</i>	<i>N</i>	<i>Z</i>	<i>S</i>	<i>H</i>	$d_1$ [%]	$t_1$ [%]	$d_2$ [%]	$t_2$ [%]
1	2	4	10	3	8	16	17,4	11,3	5,5	5,8
2	3	6	12	4	8	18	15,3	10,0	4,2	8,7
3	3	6	14	5	10	18	14,2	10,4	4,1	14,5
4	4	8	14	5	12	22	14,2	11,5	3,8	17,6

Liczby: *A* – stadiów, *M* – maszyn, *N* – typów operacji montażowych, *Z* – typów produktów, *S* – produktów, *H* – przedziałów czasowych

Wyniki zamieszczone w tabeli 1 pokazują, że zastosowanie modelu M1 (dotyczącym szeregowania bez czekania) skutkowało wyznaczeniem harmonogramów maksymalnie o ponad 17% dłuższych – w porównaniu do harmonogramów, w których dopuszczone jest wykorzystanie maszyn jako buforów międzyoperacyjnych. Czas obliczeń wzrastał w takim przypadku o ponad 10%.

Zastosowanie monolitycznych metod korzystnie wpłynęło na jakość rozwiązań – wyznaczone były harmonogramy optymalne, które były o około 4–6% krótsze w przypadku modelu M1 – w porównaniu do metody hierarchicznej. Stosowanie metody hierarchicznej skutkowało wyznaczeniem harmonogramów dłuższych o 3,8–5,5%, ale rozwiązania wyznaczone były w relatywnie krótszym czasie – wartość wskaźnika  $t_2$  wzrasta wraz z rozmiarem problemu.

## 5. Uwagi końcowe

Należy podkreślić, że opracowana metoda jest związana z technologią grupową [5]. Produkty grupowane są ze względu na operacje technologiczne, wśród których część jest identyczna (w przypadku grupy produktów – te operacje nazwano podstawowymi), a niektóre mogą być podobne (w przypadku poszczególnych wariantów produktów). Grupowanie produktów upraszcza planowanie produkcji i sterowanie nią. Do korzystnych cech technologii grupowej należy m.in. obniżenie kosztów jednostkowych, a także elastyczność produkcji – zwłaszcza dotycząca asortymentu produkcji, gdyż w linii produkcyjnej równocześnie wytwarzane są produkty różnych typów [2].

Zaletą wyróżniającą opisaną metodę monolityczną, związaną z technologią grupową, jest uwzględnienie wielowariantowych produktów – detale wyróżniające produkty mogą być dostosowane do wymagań odbiorców tych produktów. Dzięki zbudowanej strukturze danych, dotyczących tych produktów, rozmiary rozwiązywanych za-

dań są o około 8–10% mniejsze w porównaniu do struktury danych, w których każdy z wielowariantowych produktów opisywany (cyfrowo) byłby oddzielnie, bez wyszczególnienia operacji jednakowych w przypadku określonego typu produktu (nazwanych operacjami podstawowymi) i bez uwzględnienia ograniczeń kolejnościowych – jednakowych dla różnych wariantów produktu. Taka struktura danych korzystnie wpływa na czasochłonność obliczeń, co jest istotne w przypadku monolitycznego podejścia do rozwiązania problemu. Dzięki takiemu jednopoziomowemu podejściu i zastosowaniu programowania całkowitoliczbowego zaproponowana metoda umożliwia wyznaczanie rozwiązań optymalnych – budowane są najkrótsze harmonogramy.

Metodę wyróżnia także uwzględnienie ograniczonej dostępności maszyn. Dzięki temu wzięte są pod uwagę planowane przestoje, np. dotyczące konserwacji.

Obserwowany rozwój techniki komputerowej i oprogramowania dają dobre perspektywy dla zaprezentowanej metody. Dzięki temu rozwojowi można rozwiązywać problemy o coraz większych rozmiarach w coraz krótszym czasie. W przypadku zadań o relatywnie znacznych rozmiarach przedstawione relacje matematyczne dotyczące przedstawionych modeli mogą być wykorzystane do budowy metod przybliżonych – w celu budowy w bardzo krótkim czasie harmonogramów produkcji.

*Wydanie publikacji finansowane przez Akademię Górniczo-Hutniczą im. Stanisława Staszica w Krakowie (dotacja podmiotowa na utrzymanie potencjału badawczego).*

## LITERATURA

1. Castillo, L. Borrajo, D., Salido, M.A., Oddi, A. (ed.): Planning, scheduling and constraint satisfaction: from theory to practice. IOS Press, Amsterdam 2005.
2. Debnarova L., Krchova D., Kuric I.: Group technology in context of the product classification. *Advances in Sciences and Technology Research Journal*, 2014. Vol. 8 (21), p. 78–81.
3. Magiera M.: Hierarchiczna metoda planowania przepływów wielowariantowych produktów przez linie produkcyjne. *Automatyzacja procesów dyskretnych. Teoria i zastosowania. Tom I* pod red. A. Świerniaka i J. Krystek, Wydawnictwo Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, Gliwice 2016, str. 171–183.
4. Magiera M.: Monolityczna metoda harmonogramowania montażu wielowariantowych produktów w hybrydowych systemach przepływowych. *Technologia i Automatyzacja Montażu*, Instytut Mechanizacji Budownictwa i Górnictwa Skalnego oraz Wydawnictwo Czasopism i Książek Technicznych SIGMA-NOT, Warszawa 2017, nr 2, str. 13–18.
5. Pająk E.: *Zarządzanie produkcją*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 2006.
6. Pinedo M.L.: *Scheduling. Theory, Algorithms, and Systems*. Springer, New York 2008.
7. Ribas I., Leinstejn R., Framinan J.M.: Review and classification of hybrid flowshop scheduling problems from a production system and a solution procedure perspective. *Computers & Operations Research*, 2010. Vol. 37 (8), p. 1439–1454.
8. [www.gurobi.com](http://www.gurobi.com) (Gurobi Optimizer, maj 2018).