Artur BABIARZ, Adam CZORNIK, Jerzy KLAMKA, Michał NIEZABITOWSKI
Politechnika Śląska

WPŁYW NIEDOKŁADNOŚCI PARAMETRYCZNYCH NA WYKŁADNIKI LAPUNOWA DYSKRETNEGO UKŁADU LINIOWEGO O ZMIENNYCH WSPÓŁCZYNNIKACH

Streszczenie. W pracy rozważamy wpływ zakłóceń parametrycznych na maksymalny wykładnik Lapunowa dyskretnego układu liniowego o zmiennych współczynnikach. Główny wynik pracy podaje wartość górnej granicy zmienności maksymalnego wykładnika Lapunowa pod wpływem dowolnie małych zakłóceń.

THE INFLUENCE OF PARAMETRIC UNCERTAINTY ON THE LYAPUNOV EXPONENTS OF THE DISCRETE TIME-VARYING LINEAR SYSTEM

Summary. In the paper we consider the influence of parametric uncertainties on the maximal Lyapunov exponent of discrete time-varying linear system. The main result of the work gives the exact upper limit of the variation of maximal Lyapunov exponent, under the influence of arbitrary small disturbances.

1. Wprowadzenie

Rozważmy dyskretny układ liniowy o zmiennych współczynnikach

$$x(n+1) = A(n)x(n), \quad x(n) \in \mathbb{R}^s, \quad n \in \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{1}$$

gdzie $(A(n))_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczonym ciągiem macierzy odwracalnych stopnia s takim, że ciąg $\left(A^{-1}(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony. Oznaczmy

$$\max\left\{ \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A(n)\|\,,\ \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|A^{-1}(n)\right\| \right\} = a.$$

Przez $\|\cdot\|$ będziemy oznaczać normę Euklidesową w przestrzeni $\mathbb{R}^s$ oraz indukowaną przez nią normę operatorową. Macierz tranzycji Φ_A układu (1) zdefiniowana jest jako

$$\Phi_A(n,k) = A(n-1)...A(k), \quad \text{jeżeli} \quad n > k,$$

$$\Phi_A(n,n) = I, \quad \text{oraz } \Phi_A(n,k) = \Phi_A^{-1}(k,n) \quad \text{jeżeli } k > n,$$

gdzie I jest macierzą jednostkową stopnia s. Dla warunku początkowego $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^s$ rozwiązanie układu (1) będzie oznaczane jako $(x(n,x_0))_{n\in\mathbb{N}}$, a zatem

$$x(n,x_0) = \Phi_A(n,0)x_0.$$

W pewnych fragmentach naszej pracy wygodnie będzie posługiwać się oznaczeniem $(x(n,k,x_k))_{n\in\mathbb{N}}$ dla rozwiązania układu (1) takiego, że

$$x(n,k,x_k) = x\left(n, \Phi_A(0,k)x_k\right).$$

Dla $x_0 \in \mathbb{R}^s$, $x_0 \neq 0$ wykładnikiem Lapunowa $\lambda_A(x_0)$ rozwiązania $(x(n,x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ układu (1) jest z definicji liczba

$$\lambda(x_0) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \ln \|x(n,x_0)\|.$$

Wiadomo [1], że zbiór wszystkich wykładników Lapunowa rozwiązań układu (1) zawiera co najwyżej s elementów. Ponumerujmy je rosnąco:

$$-\infty < \lambda_1(A) < \lambda_2(A) < ... < \lambda_r(A) < \infty.$$

Wiadomo również [4], że największy z wykładników Lapunowa rozwiązań układu (1), który będziemy oznaczać $\lambda_g(A)$, może być wyrażony w następujący sposób:

$$\lambda_g(A) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \ln \|\Phi_A(n,0)\|.$$

Wykładniki Lapunowa charakteryzują eksponencjalne tempo wzrostu lub malenia trajektorii układu (1), w szczególności największy z nich charakteryzuje eksponencjalną stabilność układu (1) zgodnie z następującym twierdzeniem.

Twierdzenie 1. *[4]. Układ (1) jest eksponencjalnie stabilny wtedy i tylko wtedy gdy* $\lambda_g(A) < 0$.

Często w zastosowaniach praktycznych współczynniki układu (1) nie są znane dokładnie, a jedynie z pewnym przybliżeniem. Rozpatrujemy wówczas układ

$$y(n+1) = (A(n) + Q(n))\, y(n), \quad y(n) \in \mathbb{R}^s, n \in \mathbb{N}_0 \tag{2}$$

gdzie $(Q(n))_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem macierzy kwadratowych stopnia s z pewnej klasy $\mathfrak{M}$ rozpatrywanych zakłóceń. Ciąg $(Q(n))_{n\in\mathbb{N}}$ reprezentuje wówczas niedokładności parametrów. Układ (2) dalej będziemy nazywali układem zakłóconym. Jego macierz tranzycji będziemy oznaczać przez Φ_{A+Q}, wykładniki Lapunowa

$$\lambda_1(A+Q) < \lambda_2(A+Q) < ... < \lambda_r(A+Q),$$

a największy wykładnik Lapunowa przez $\lambda(A+Q)$.

Pod wpływem macierzy Q, wykładniki Lapunowa układu (1) mogą zmieniać się w sposób nieciągły [2], [3]. Jest możliwym, że skończony skok wykładników Lapunowa oryginalnego układu (1) odpowiada dowolnie małej wielkości $\sup\|Q(n)\|$. W szczególności istnieją układy eksponencjalnie stabilne i eksponencjalnie dążące do zera zakłócenia takie, że układ zakłócony nie jest stabilny [3].

Dla ustalonej klasy zakłóceń $\mathfrak{M}$ wprowadźmy następującą wielkość

$$\Lambda_g(\mathfrak{M}) = \sup\left\{\lambda_g(A+\Delta) : \Delta \in \mathfrak{M}\right\}.$$

Będziemy ją nazywać górną granicą zmienności wykładnika Lapunowa układu (1) dla zakłóceń z klasy $\mathfrak{M}$.

Wyznaczenie górnej granicy zmienności wykładników Lapunowa dla różnych klas zakłóceń jest jednym z głównych tematów badawczych związanych z wykładnikami Lapunowa. Ten problem dla układów ciągłych i różnych klas zkałóceń został rozwiązany przez matematyków rosyjskich i białoruskich, a obecny stan wiedzy został wyczerpująco opisany w monografii [6].

Dla dyskretnej wersji tego problemu znane są jedynie górne oszacowania dla górnej granicy zmienności wykładników Lapunowa dla różnych klas zakłóceń [4]. Ta praca jest pierwszą, w której pokazujemy dokładną wartość dla tak zwanych dowolnie małych zakłóceń zdefiniowanych poniżej.

Rozważmy zbiór

$$\mathfrak{M}_q = \{Q = (Q(n))_{n\in\mathbb{N}} : \|Q\|_\infty \leqslant q\}\,, \tag{3}$$

gdzie $\|Q\|_\infty = \sup \|Q(n)\|$. Odnotowana powyżej nieciągłość wykładników Lapunowa jako funkcji współczynników oznacza, że dla pewnych układów (1) granica

$$\lim_{q\to 0^+} \Lambda\left(\mathfrak{M}_q\right) = \lim_{q\to 0^+}\left(\sup_{\|\Delta\|_\infty < q} \lambda_g\left(A+Q\right)\right) \tag{4}$$

może nie być równa $\lambda\left(A\right)$. W tej pracy wyznaczymy dokładną wartość tej granicy.

2. Główny wynik

Wprowadźmy następującą definicję.

Defincja 1. *Wykładnikiem centralnym układu (1) nazywamy liczbę*

$$\Omega(A) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln\|\Phi_A(N+i,i)\|\right).$$

W pracy [5] pokazano, że definicja ta jest poprawna (istnieje granica) oraz pokazano kilka alternatywnych formuł dla wykładnika centralnego. Formuły te podaje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 2. *Istnieją granice*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln\|\Phi_A(N+i,i)\|\right)$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln\|\Phi_A\left((i+1)\,N,iN\right)\|\right),$$

oraz są równe

$$\inf_{N\in\mathbb{N}}\frac{1}{N}\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln\|\Phi_A(N+i,i)\|\right)$$

$$\inf_{N\in\mathbb{N}}\frac{1}{N}\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln\|\Phi_A\left((i+1)\,N,iN\right)\|\right).$$

Związek pomiędzy górną granicą zmienności wykładników Lapunowa dla rozpatrywanej klasy zakłóceń i wykładnikiem centralnym podaje twierdzenie udowodnione w pracy [4]:

Twierdzenie 3. *Zachodzi nierówność*

$$\lim_{\delta\to 0^+}\left(\sup_{\|\Delta\|_\infty<\delta}\lambda_g\left(A+\Delta\right)\right)\leqslant\Omega(A). \tag{5}$$

Główny wynik, który udowodnimy w tej pracy mówi, że w nierówności (5) zachodzi równość. Wynik ten uzyskamy adaptując do układów dyskretnych tak zwaną metodą powrotów Milionschikova wprowadzoną w pracy [7] dla układów ciagłych.

W tym celu wprowadźmy następująca definicję i udowodnijmy pewien lemat.

Defincja 2. *Dla* $\varepsilon>0$ *rozwiązanie* $(x(n,x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ *układu (1) nazywa się* $\varepsilon-$*szybkim na odcinku* $[k,m]$ *, jeżeli*

$$\|x(m,x_0)\|\geqslant\sin\varepsilon\left\|\Phi_A\left(m,k\right)\right\|\|x(k,x_0)\|\,.$$

W przeciwnym razie rozwiązanie $(x(n,x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ *nazywamy* $\varepsilon-$*wolnym na odcinku* $[k,m]$. *Jeżeli zachodzi równość*

$$\|x(m,x_0)\|=\left\|\Phi_A\left(m,k\right)\right\|\|x(k,x_0)\|\,,$$

to rozwiązanie $(x(n,x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ *nazywamy maksymalnym na odcinku* $[k,m]$.

Rozwiązanie maksymalne istnieje na każdym odcinku $[k,m]$. Istotnie, jeżeli x_k jest takim wektorem długości 1, że

$$\left\|\Phi_A\left(m,k\right)\right\|=\left\|\Phi_A\left(m,k\right)x_k\right\|,$$

to dla rozwiązania $(x(n,k,x_k))_{n\in\mathbb{N}}$ mamy

$$\|x(m,k,x_k)\|=\left\|\Phi_A\left(m,k\right)x_k\right\|=\left\|\Phi_A\left(m,k\right)\right\|\|x(k,x_0)\|\,.$$

Lemat 1. *Jeżeli* $(x(n,x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ *jest* $\varepsilon-$*szybkim na odcinku* $[k,m]$ *rozwiązaniem układu (1), to istnieje macierz zakłóceń* $(Q(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *różna od macierzy zerowej tylko w punkcie* $k-1$ *i w tym punkcie spełniająca nierówność* $\|Q(k-1)\|\leqslant(2a+1)\varepsilon$ *oraz taka, że układ zakłócony (2) ma* $\varepsilon-$*szybkie na odcinku* $[k,m]$ *rozwiązanie* $(y(n,y_0))_{n\in\mathbb{N}}$ *spełniające warunki:*

$$y(k-1,y_0)=x(k-1,x_0)i\,\|y(k,y_0)\|=\|x(k,x_0)\|\,.$$

Dowód tego lematu jest długi, techniczny i będzie zaprezentowany w innej publikacji. Poniższe twierdzenie zawiera główny wynik tej pracy.

Twierdzenie 4. *Zachodzi równość*

$$\lim_{\delta\to 0^+}\left(\sup_{\|Q\|_\infty<\delta}\lambda_g\left(A+Q\right)\right)=\Omega(A). \tag{6}$$

Dowód 1. *Na mocy twierdzenia 3. wystarczy udowodnić, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje ciąg zakłóceń $(Q(n))_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|Q(k)\| \leqslant \varepsilon$$

i

$$\lambda_s(A+Q) \geqslant \Omega(A) - \varepsilon.$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$, oznaczmy

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2a+1} \tag{7}$$

i wybierzmy $N \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\sin\delta \geqslant \exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon N\right) \tag{8}$$

i

$$\Omega_N(A) \geqslant \Omega(A) - \frac{\varepsilon}{2}, \tag{9}$$

gdzie

$$\Omega_N(A) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{Nn} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \|\Phi_A((i+1)N, iN)\|.$$

Ciąg macierzy zakłóceń $(Q(n))_{n\in\mathbb{N}}$ będziemy konstruowali indukcyjnie względem $i \in \mathbb{N}_0$ na odcinkach $[iN, (i+1)N]$. W i-tym kroku macierz zakłóceń i rozwiązanie $(y(n,y_0))_{n\in\mathbb{N}}$ będziemy budować na odcinku $[iN, (i+1)N]$, przy czym w $i+1-$ szym kroku będziemy, być może, zmieniać $(Q(n))_{n\in\mathbb{N}}$ w punkcie $(i+1)N-1$, a rozwiązanie $(y(n,y_0))_{n\in\mathbb{N}}$ w punkcie $(i+1)N$, ale w kolejnych krokach zmian tych wartości na tym odcinku nie będziemy już dokonywać.

Zdefiniujmy jako $Q(0) = 0$, a jako $y(0) = y_0$ weźmy dowolny wektor niezerowy. Przypuśćmy, że zrobiliśmy już krok $i-1$, to znaczy $Q(n)$ i $y(n,y_0)$ są już zdefiniowane dla $n = 0, 1, ..., iN$. Zdefinujmy $i-$ty krok.

Jeżeli rozwiązanie $(x(n,x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ układu niezakłóconego (1) takie, że $x(iN) = y(iN)$ jest $\delta-$szybkie na odcinku $[iN, (i+1)N]$, to definiujemy $Q(n) = 0$ i $y(n,y_0) = x(n,x_0)$ dla $n = iN+1, ..., (i+1)N$. W przeciwnym wypadku, to jest jeżeli rozwiązanie $(x(n,x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ jest na $\delta-$wolne na odcinku $[iN, (i+1)N]$, to zgodnie z lematem znajdzie się w punkcie zakłócenie $Q((i+1)N-1)$ takie, że

$$\|Q(k)\| \leqslant \delta(2a+1) = \varepsilon$$

i rozwiązanie $(y(n,y_0))_{n\in\mathbb{N}}$ układu zakłóconego przedłużone na odcinek $[iN, (i+1)N]$ jest $\delta-$szybkie na odcinku $[iN, (i+1)N]$. Ponadto zgodnie z lematem rozwiązanie $(y(n,y_0))_{n\in\mathbb{N}}$ określone na $i-1-$szym kroku i zmienione w i-tym kroku pozostaje $\delta-$szybkie na odcinku $[(i-1)N, iN]$. Dlatego skonstruowany w ten sposób układ zakłócony (2) z macierzą $Q = (Q(n))_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia nierówność

$$\|Q(k)\| \leqslant \varepsilon$$

dla wszystkich $k \in \mathbb{N}_0$ oraz jego rozwiązanie jest $\delta-$szybkie na odcinku $[iN, (i+1)N]$. Dlatego rozwiązanie $(y(n,y_0))_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia nierówność

$$\|y((i+1)N)\| \geqslant \sin\delta \|\Phi_A((i+1)N, iN)\| \|y(iN)\|, \; i \in \mathbb{N}.$$

Stosując tę nierówność wielokrotnie otrzymamy, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$\|y(nN)\| \geqslant (\sin\delta)^n \|y(0)\| \prod_{i=0}^{n-1} \|\Phi_A((i+1)N, iN)\|$$

zatem

$$\ln\|y(nN)\| \geqslant n\ln\sin\delta + \ln\|y(0)\| + \sum_{i=0}^{n-1} \ln\|\Phi_A((i+1)N, iN)\|$$

i

$$\frac{1}{nN}\ln\|y(nN)\| \geqslant \frac{\ln\sin\delta}{N} + \frac{\ln\|y(0)\|}{nN} + \frac{1}{nN}\sum_{i=0}^{n-1} \ln\|\Phi_A((i+1)N, iN)\|.$$

Przechodząc w powyższej nierówności do granicy górnej gdy $n \to \infty$, uwzględniając nierówność (9) i fakt, że

$$\lambda_s(A) \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{Nn}\ln\|y(nN)\|$$

dostajemy:

$$\lambda_s(A+Q) \geqslant \frac{\ln\sin\delta}{N} + \Omega(A) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Teza twierdzenia wynika teraz z nierówności (8). Dowód jest zakończony.

Z ostatniego twierdzenia wynika następujący wniosek.

Wniosek 1. *Dla układu (1) istnieje ciąg $Q = (Q(n))_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że*

$$\lim_{n\to\infty} Q(n) = 0 \ i \ \lambda_g(A+Q) = \Omega(A).$$

3. Zakończenie

Jednym z ważniejszych problemów teorii wykładników Lapunowa jest opis wpływu zakłoceń (niedokładności) parametrycznych na wartości wykładników Lapunowa. Problem ten dla układów ciągłych był intensywnie badany przez matematyków Rosyjskich i Białoruskich, a uzyskane przez nich wyniki zostały wyczerpująco opisane w monografii [6]. Rezultaty dla układów dyskretnych są znacznie skromniejsze i zostały podsumowane w monografii [4]. Główny wynik tej pracy podaje wartość górnej granicy zmienności maksymalnego wykładnika Lapunowa pod wpływem dowolnie małych zakłóceń.

Podziękowania

Wyniki przedstawione w pracy są efektem prac w ramach grantów finansowanych ze źródeł Narodowego Centrum Nauki w Polsce zgodnie z decyzjami DEC-2014/13/B/ST7/00755 (A.B. i A.C.), DEC-2012/07/B/ST7/01404 (J.K.) oraz DEC-2012/07/N/ST7/03236 (M.N.). Ponadto obliczenia zostały wykonane przy użyciu infrastruktury IT zakupionej w ramach grantu Narodowego Centrum Badań i Rozwoju pt. Górnośląskie Centrum Obliczeń Naukowych i Inżynierskich (GeCONiI) o numerze POIG.02.03.01-24-099/13).

LITERATURA

1. Barreira L., Pesin Y.B.: Lyapunov Exponents and Smooth Ergodic Theory. University Lectures Series, 23, AMS Bookstore, 2001.
2. Czornik A., Mokry P., Nawrat A.: On the exponential exponets of discrete linear systems. Linear Algebra and Its Applications, 433 (4), 2010, pp. 867–875.
3. Czornik A., Mokry P., Nawrat A.: On the sigma exponents of discrete linear systems. IEEE Transaction on Automatic Control, 55 (6), 2010, pp. 1511–1515.
4. Czornik A.: Perturbation Theory for Lyapunov Exponents of Discrete Linear Systems. Wydawnictwa AGH, Kraków 2012.
5. Czornik A., Niezabitowski M.: On the spectrum of discrete time-varying linear systems. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems 9, 2013, pp. 27–41.
6. Izobov N.A.: Vvedenie v teoriyu pokazatelei Lyapunova (Introduction to the Theory of Lyapunov Exponents). Minsk: Belarus. Gos. Univ., 2006. (Russian)
7. Millionshchikov V.M.: A proof of attainability of central exponents of linear systems. Sibirskii Matematicheskii Zhurnal, 10, 1969, pp. 99–104.