

Piotr WAWRZYŃIAK, Piotr FORMANOWICZ
Instytut Informatyki, Politechnika Poznańska

OPTYMALIZACJA TOPOLOGII ODPORNEJ SIECI SZKIELETOWEJ W WARTUNKACH AWARII WĘZŁÓW W JEDNOSTKOWYCH GRAFACH DYSKOWYCH*

Streszczenie. Niniejsza praca dotyczy problemu projektowania odpornej topologii sieci dronów wykorzystujących komunikację optyczną (FSO). Modelem takiej sieci może być jednostkowy graf dyskowy (UDG). Ograniczenia sprzętowe (dwa urządzenia na dron) i przyjęte założenie jednej stacji bazowej narzucają topologię ścieżki Hamiltona. Odporność sieci rozumiemy jako możliwość rekonfiguracji sieci po awarii pojedynczego węzła. Jego sąsiedzi na ścieżce muszą umożliwić zestawienie bezpośredniego połączenia między nimi.

OPTIMIZATION OF A RESILIENT BACKBONE NETWORK TOPOLOGY UNDER NODE FAILURE CONDITIONS IN UNIT DISK GRAPHS

Summary. This study addresses the problem of designing a resilient topology for drone networks using Free-Space Optical (FSO) communication. Such a network can be modeled as a unit disk graph (UDG). Hardware constraints (two devices per drone) and the assumption of a single base station impose a Hamiltonian path topology. Network resilience is understood as the ability to reconfigure the network after a single node failure. The neighbors of the failed node on the path must allow a direct connection to be established between them.

1. Wprowadzenie

Jednostkowe grafy dyskowe (ang. *Unit Disk Graph* - UDG) [1] są dobrym modelem sieci bezprzewodowych, w których łączność między węzłami zależy wyłącznie od odległości między nimi. Przykładem takiej sieci może być sieć szkieletowa budowana w oparciu o drony wykorzystujące kierunkową komunikację optyczną (FSO - Free Space Optics). Drony, ze względów kosztowych, energetycznych i wagowych, wyposażone są w minimalną liczbę transceiverów/nadajników-odbiorników optycznych, czyli dokładnie w dwie sztuki. Powstaje zatem problem takiego zestawienia połączeń między dronami, aby przy ograniczeniu do dwóch łączy na węzeł wszystkie drony tworzyły jedną spójną sieć. Dla rozpatrywanego przypadku jednej stacji bazowej (zapewniającej dostęp do infrastruktury naziemnej) problem ten staje się równoważny problemowi znajdowania ścieżki Hamiltona [5]. Taka ścieżka Hamiltona, łącząca stację bazową ze wszystkimi dronami, zapewnia pełną łączność przy minimalnych zasobach. Jest ona jed-

*Praca częściowo sfinansowana ze środków statutowych Politechniki Poznańskiej.

nak skrajnie wrażliwa na awarię choćby jednego węzła. Uszkodzenie dowolnego drona wewnątrz ścieżki rozspaja sieć, uniemożliwiając komunikację. W pracy tej rozpatrujemy problem projektowania odpornej topologii sieci. Topologia taka powinna umożliwiać bezzwłoczne odtworzenie spójności sieci w przypadku awarii dowolnego drona. Odtworzenie spójności polega na zestawieniu bezpośredniego łącza pomiędzy sąsiadami uszkodzonego drona. Rozwiązanie to nie wymaga zmiany pozycji dronów, ani rekonfiguracji pozostałych części sieci, a jedynie przełączenia kierunku wiązek optycznych bezpośrednich sąsiadów. Przykładowo, jeśli stacja bazowa i drony tworzą ścieżkę $P = B - D_1 - D_2 - D_3 - D_4 - D_5$ to w przypadku awarii drona D_2 odporna topologia powinna umożliwić bezzwłoczną rekonfigurację do postaci $P = B - D_1 - D_3 - D_4 - D_5$. Warunkiem takiej rekonfiguracji jest oczywiście istnienie dopuszczalnej geometrycznie (odległość mniejsza od promienia łączności) krawędzi pomiędzy D_1 i D_3 .

2. Model sieci i definicja odporności

2.1. Jednostkowy graf dyskowy

Jednostkowy graf dyskowy to graf geometryczny, w którym wierzchołki odpowiadają punktom w przestrzeni euklidesowej, a krawędź między wierzchołkami występuje wtedy i tylko wtedy, gdy odległość między nimi nie przekracza pewnej jednostkowej długości. Graf taki ten w naturalny sposób opisuje sieci działające w otwartej przestrzeni powietrznej, gdzie o możliwości zestawienia łącza decyduje wyłącznie odległość między urządzeniami (przeszkody terenowe można pominąć).

2.2. Topologia sieci z pojedynczą stacją bazową

Rozważana sieć składa się z jednej stacji bazowej B będącej punktem dostępu do sieci budowanej w oparciu o zbiór dronów $D = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$. Ograniczenie sprzętowe do dwóch urządzeń FSO na dron oznacza, że stopień każdego węzła w aktywnej topologii nie przekracza dwóch: $\forall_{D_i \in D} \deg(D_i) \leq 2$, a wymóg łączności w całej sieci wymusza strukturę ścieżki, gdzie stacja bazowa B zawsze stanowi jeden z jej końców.

3. Odporność przez lokalną rekonfigurację

3.1. Definicja odporności

Kluczowym założeniem niniejszej pracy jest prosty mechanizm rekonfiguracji w przypadku awarii dowolnego węzła, przy czym awaria stacji bazowej nie jest tu rozważana (stanowi to inny typ problemu). Odporność dotyczy więc sytuacji w której jeden z dronów zostaje z dowolnej przyczyny usunięty, a pozostałe węzły, powinny nadal tworzyć łańcuch połączony ze stacją bazową. Taki wariant ścieżki Hamiltona nazywany 1-odporną ścieżką Hamiltona (ang. *1-fault tolerant Hamiltonian path*). Model ten jest również rozważany przy projektowaniu połączeń sieci wewnątrz układów scalonych (sieci typu NoC - Network on Chip) [2]. W ogólności można również zdefiniować k -odporność, przy rozważaniu usunięcia k węzłów - tym problemem jednak nie będziemy się w tej pracy zajmować. Każdorazowo gdy będzie mowa o odpornej ścieżce Hamiltona, będziemy rozważać ścieżkę 1-odporną.

3.2. Lokalna rekonfiguracja

Spójność sieci po awarii węzła można odtwarzać na różne sposoby. W wariantcie *globalnym* ścieżka wyznaczana jest od nowa dla wszystkich sprawnych węzłów, co w ogólności wymaga ponownego rozwiązania problemu wyznaczania ścieżki i może prowadzić do przebudowy wielu połączeń. W niniejszej pracy rozważamy *rekonfigurację lokalną*, w której kluczowe jest bezzwłoczne odtworzenie spójności sieci, bez przemieszczania dronów i bez przebudowy połączeń w pozostałych częściach sieci. Polega ona na zestawieniu bezpośredniego łącza pomiędzy sąsiadami uszkodzonego węzła. Awaria węzła D_i zwalnia po jednym urządzeniu FSO w węzłach D_{i-1} oraz D_{i+1} , które mogą być skierowane na siebie wzajemnie.

Na uwagę zasługują przypadki brzegowe. Jak wspomniano, awaria stacji bazowej nie jest rozpatrywana, natomiast awaria ostatniego węzła ścieżki D_n nie wymaga żadnej rekonfiguracji - łańcuch ulega w tym przypadku jedynie skróceniu.

Istotną zaletą *lokalnej rekonfiguracji* jest czas przywrócenia łączności, ograniczony wyłącznie przez czas ponownego wycelowania i synchronizacji pojedynczego łącza optycznego, co nie wymaga ani globalnej koordynacji, ani ponownego rozwiązywania problemu wyznaczania ścieżki.

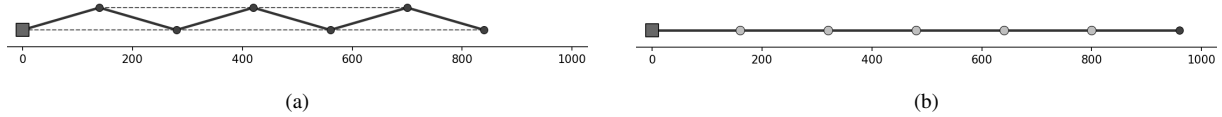
3.3. Wpływ geometrii na istnienie odpornych ścieżek

Wymóg odporności istotnie zaostrza warunki istnienia rozwiązania problemu. W przypadku klasycznej ścieżki Hamiltona dla grafów UDG wystarczy, aby każde dwa kolejne węzły znajdowały się w swoim zasięgu. W ścieżce odpornej dodatkowo każde trzy kolejne węzły sekwencji muszą tworzyć trójkąt w grafie UDG, a więc leżeć we wzajemnej bliskości geometrycznej. Konsekwencją tego jest ograniczenie długości kolejnych łączy. Dla kolejnych dronów D_1, D_2, D_3 , po węźle D_2 następny węzeł D_3 musi pozostać w zasięgu D_1 , co wymaga albo krótkich kroków, rzędu połowy zasięgu, albo - przy dłuższych krokach - zawrócenia ścieżki w pobliże węzła D_1 . Odporne ścieżki cechuje więc zwarty przebieg, o krokach krótszych niż połowa zasięgu lub dużych zmianach kierunku. Zmniejsza to w oczywisty sposób liczbę dopuszczalnych rozwiązań względem klasycznego wariantu problemu.

Ma to też oczywiście konsekwencje w postaci wymaganej gęstości węzłów. W rozmieszczeniach rzadkich, w których może istnieć zwykła ścieżka Hamiltona, takiej odpornej ścieżki Hamiltona nie będzie.

Oba zjawiska ilustrują proste instancje przedstawione na rysunku 1. W instancji z rysunku 1a węzły tworzą zwarty zygzak: kolejne węzły dzieli 0,54 promienia łączności i węzły tworzą trójkąty w grafie UDG. Istnieją więc wszystkie krawędzie zapasowe (linie przerywane) i ścieżka jest 1-odporna. W instancji z rysunku 1b węzły są współliniowe i rozmieszczone równomiernie co 0,8 promienia łączności. Zwykła ścieżka Hamiltona istnieje (przejście wzdłuż linii), jednak węzły odległe o dwie pozycje dzieli 1,6 promienia, więc nie istnieje żadna krawędź zapasowa. Żaden węzeł wewnętrzny nie jest tu chroniony.

Zagadnienia pokrewne rozważano dotychczas przede wszystkim dla grafów ogólnych. W pracy [8] badano 1-odporne ścieżki w grafach spełniających warunek Orego ($\deg(u) + \deg(v) \geq n$). Omawiane podejście z ograniczeniami do grafów UDG i wymogiem lokalnej rekonfiguracji stawia jednak istotnie silniejsze wymagania.



Rys. 1. Przykładowe instancje problemu: (a) instancja, w której istnieje 1-odporna ścieżka Hamiltona – linią ciągłą oznaczono krawędzie ścieżki, linią przerywaną krawędzie zapasowe; (b) instancja, w której istnieje zwykła ścieżka Hamiltona, lecz nie istnieje ścieżka 1-odporna – jasnym kolorem oznaczono węzły pozbawione krawędzi zapasowej

4. Sformułowanie problemu

4.1. Definicja formalna

Niech $P = \{p_b\} \cup \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ będzie zbiorem punktów na płaszczyźnie euklidesowej, odpowiadających położeniom stacji bazowej oraz n dronów. Rozważamy jednostkowy graf dyskowy $G = (V, E)$, w którym $V = \{B\} \cup D$ gdzie $D = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$, oraz

$$\{u, w\} \in E \iff \|p_u - p_w\| \leq 1,$$

gdzie p_u oznacza punkt odpowiadający węzłowi u , a $\|p_u - p_w\|$ oznacza odległość euklidesową pomiędzy punktami p_u i p_w .

Definicja 1. (1-odporna ścieżka Hamiltona) Niech $\pi = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ będzie permutacją zbioru D i przyjmijmy $v_0 = B$. Permutację π nazywamy 1-odporną ścieżką Hamiltona w grafie G , jeżeli spełnione są warunki:

- (i) $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ dla każdego $0 \leq i \leq n-1$ (poprawność ścieżki),
- (ii) $\{v_{i-1}, v_{i+1}\} \in E$ dla każdego $1 \leq i \leq n-1$ (istnienie krawędzi zapasowych).

Warunek (i) gwarantuje, że sekwencja $v_0-v_1-v_2-\dots-v_n$ tworzy ścieżkę Hamiltona w grafie G , rozpoczynającą się w stacji bazowej. Warunek (ii) zapewnia, że dla każdego węzła, którego awaria rozspójniłaby łańcuch, istnieje krawędź zapasowa umożliwiająca lokalną rekonfigurację. Zauważmy, że indeks $i = n$ nie występuje w warunku (ii), ponieważ awaria ostatniego węzła ścieżki nie wymaga rekonfiguracji.

Problem 1-odpornej ścieżki Hamiltona (w wariacie decyzyjnym) polega na rozstrzygnięciu, czy dla danego grafu G istnieje permutacja π spełniająca warunki (i) oraz (ii). Łącznie z wariantem decyzyjnym rozważamy *wariant przeszukiwania* (konstrukcyjny), w którym wyznaczamy konkretną permutację (kolejność dronów). Prezentowane w dalszej części pracy algorytmy rozwiązują wariant decyzyjny problemu, poprzez rozwiązanie jego wariantu przeszukiwania.

4.2. Wariant optymalizacyjny

Ponieważ pełna odporność nie zawsze jest osiągalna, można również zdefiniować *wariant optymalizacyjny*, w którym spośród wszystkich ścieżek Hamiltona należy znaleźć taką, która maksymalizuje liczbę węzłów odpornych na awarię, to jest liczbę wierzchołków, dla których istnieje odpowiednia krawędź zapasowa. Wariantowi temu

odpowiada zbiór problemów decyzyjnych z parametrem k : czy istnieje ścieżka Hamiltona, w której co najmniej k węzłów jest odpornych na awarię (odporność częściowa). Dla $k = n - 1$ jest to opisany wyżej problem decyzyjny 1-odpornej ścieżki Hamiltona.

5. Złożoność problemu

Problem 1-odpornej ścieżki Hamiltona, należy do klasy NP, dla danej permutacji π sprawdzenie warunków (i) oraz (ii) wymaga zweryfikowania istnienia $2n - 1$ krawędzi, co można wykonać w czasie liniowym względem liczby węzłów.

Klasyczny problem ścieżki Hamiltona jest NP-zupełny również przy ograniczeniu dla grafów UDG. Wynika to z faktu, że problem ten jest również NP-zupełny dla grafów kratowych (ang. *grid graphs*) [4], które stanowią podklasę jednostkowych grafów dyskowych.

Wymóg odporności zawęża zbiór dopuszczalnych rozwiązań - każda 1-odporna ścieżka Hamiltona jest w szczególności ścieżką Hamiltona, lecz nie ma tu implikacji odwrotnej. Dodatkowe ograniczenia mogą zarówno zachować trudność problemu, ale również uczynić go łatwiejszym. Standardowa redukcja z problemu klasycznego nie przenosi się wprost, ponieważ warunek istnienia krawędzi zapasowych zmienia strukturę dopuszczalnych rozwiązań.

Zgodnie z naszą wiedzą, dokładny status złożoności obliczeniowej problemu 1-odpornej ścieżki Hamiltona w grafach UDG pozostaje otwarty, a silny związek z NP-zupełnym problemem klasycznym oraz wykładniczy rozmiar przestrzeni rozwiązań sugerują również jego NP-zupełność.

6. Eksperymenty obliczeniowe

Przestrzeń rozwiązań omawianego problemu ma rozmiar $n!$, ponieważ należy rozpatrzyć wszystkie możliwe kolejności dronów za stacją bazową. Już dla umiarkowanej liczby dronów, liczba możliwych permutacji staje się bardzo duża (dla 10 to $10! = 3628800$, a dla 20 już $20! \approx 2 \cdot 10^{18}$). Sprawdzenie pojedynczej permutacji jest stosunkowo proste, ponieważ należy sprawdzić istnienie wszystkich wymaganych krawędzi ścieżki oraz krawędzi zapasowych, stąd przy założeniu stałego czasu takiego sprawdzenia (na przykład przy zapisie grafu w postaci macierzy sąsiedztwa) czas ten jest liniowy względem liczby dronów n . Trudność problemu wynika więc nie z kosztu oceny pojedynczego rozwiązania, ale liczby możliwych permutacji. Algorytm dokładny sprawdzający wszystkie permutacje może być więc praktyczny tylko dla małych instancji. Dla większych instancji konieczne jest użycie metod heurystycznych.

6.1. Algorytm dokładny

W celu oszacowania liczby ścieżek oraz oceny jakości algorytmu heurystycznego opracowano prosty algorytm dokładny. Algorytm ten nie przegląda wszystkich $n!$ permutacji, lecz stosuje przeszukiwanie z nawrotami. Ścieżka budowana jest od stacji bazowej przez kolejne węzły, dzięki czemu niedopuszczalne permutacje są odrzucane natychmiast. Kandydat na kolejny węzeł musi sąsiadować z bieżącym, a w przypadku ścieżki 1-odpornej dodatkowo również z przedostatnim (warunek istnienia krawędzi zapasowej). Dodatkowo sprawdzane jest, czy węzły jeszcze nie odwiedzone tworzą z ostatnim wierzchołkiem graf spójny, co znacząco poprawia wydajność. Oczywiście

mimo tych usprawnień pesymistyczna złożoność pozostaje wykładnicza, co ogranicza praktyczne zastosowania algorytmu do małych instancji.

Algorytm posiada również tryb zliczania, w którym przeszukiwanie nie zatrzymuje się po znalezieniu pierwszego rozwiązania, lecz przegląda dalej wszystkie możliwe rozgałęzienia, aby zliczyć wszystkie zwykłe, czy też 1-odporne ścieżki Hamiltona (w zależności od aktywowanych warunków).

6.2. Algorytm genetyczny

Spośród metod heurystycznych, wybór padł na algorytm genetyczny [7], meta-heurystykę inspirowaną mechanizmami doboru naturalnego. Istotna tu była zdolność do zachowywania wartościowych fragmentów oraz ich przenoszenia między instancjami na etapie krzyżowania.

6.2.1. Reprezentacja

Osobnik reprezentowany jest jako permutacja $\pi = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ zbioru dronów, odpowiadająca kolejności węzłów na ścieżce za stacją bazową. Reprezentacja permutacyjna gwarantuje, że każdy węzeł występuje dokładnie raz, dzięki czemu jedynymi naruszeniami są brakujące krawędzie, zwykłe i zapasowe.

6.2.2. Populacja początkowa

Populację początkową budujemy za pomocą zachłannej heurystyki najbliższego sąsiada startując ze stacji bazowej. W przypadku braku możliwości budowy ścieżki kontynuujemy od losowego niewykorzystanego wierzchołka. Taka budowa populacji początkowej przyspiesza osiąganie poprawnych ścieżek względem całkowicie losowego budowania populacji początkowej.

6.2.3. Funkcja przystosowania

Dla każdego osobnika $\pi = (v_1, \dots, v_n)$, przyjmując $v_0 = B$, definiujemy dwie miary:

- $L(\pi)$ – liczba węzłów $i \in \{0, \dots, n-1\}$, dla których $\{v_i, v_{i+1}\} \notin E$ (brakujące krawędzie ścieżki); poprawna ścieżka Hamiltona musi spełniać $L(\pi) = 0$,
- $F(\pi)$ – liczba węzłów $i \in \{1, \dots, n-1\}$, dla których $\{v_{i-1}, v_{i+1}\} \notin E$ (brakujące krawędzie zapasowe, czyli naruszenia warunku 1-odporności); dla ścieżki 1-odpornej $F(\pi) = 0$.

Całkowita funkcja kary (minimalizowana) ma postać:

$$\text{fitness}(\pi) = w_1 \cdot L(\pi) + w_2 \cdot F(\pi),$$

gdzie wagi ustalono eksperymentalnie: $w_1 = 10$, $w_2 = 5$. Ponieważ reprezentacja permutacyjna gwarantuje, że każdy osobnik zawiera wszystkie węzły dokładnie raz, dodatkowe składniki kary za niekompletność rozwiązania nie są potrzebne. Nierówność $w_1 > w_2$ odzwierciedla priorytet poprawności ścieżki nad jej odpornością: sieć musi przede wszystkim tworzyć spójny łańcuch, a liczba węzłów chronionych jest maksymalizowana w drugiej kolejności. Obliczenie wartości funkcji wymaga sprawdzenia istnienia $2n - 1$ krawędzi, a więc czasu $O(n)$ przy zapisie grafu w postaci macierzy sąsiedztwa. Obie miary są z definicji nieujemne (zliczają naruszenia warunków), a odpowiadające im wagi są zawsze dodatnie. Algorytm dąży do znalezienia osobnika o wartości $\text{fitness}(\pi) = 0$, co odpowiada poprawnej 1-odpornej ścieżce Hamiltona, ze spełnionym brakiem naruszeń warunków (i) $L(\pi) = 0$ i (ii) $F(\pi) = 0$.

6.2.4. Operatory genetyczne

Jako operator krzyżowania opracowano dopasowane do tego problemu *Krzyżowanie Sąsiedztw z Rekonfiguracją* (ang. *Edge Recombination Crossover - ERX*), tak by zachowywać relacje sąsiedztw istotne dla odporności ścieżki. Operator buduje potomka od stacji bazowej, korzystając z sąsiedztw występujących w obydwu rodzicach. Brane z nich są węzły tworzące poprawne krawędzie ścieżki oraz jednocześnie zapewniające krawędź zapasową. Przy braku takich kandydatów z rodziców, wybierane są kolejno: poprawne połączenia, nieidealni sąsiedzi z rodziców lub najbliższy niewykorzystany węzeł.

Mutacja losowo wykonuje jedną z trzech standardowych operacji: zamianę miejscami dwóch węzłów, odwrócenie kolejności losowo wybranego fragmentu ścieżki albo przeniesienie pojedynczego węzła w inne miejsce sekwencji.

6.2.5. Selekcja

Rodziców do krzyżowania wybiera się poprzez *selekcję turniejową*, z puli losowych kandydatów wybierane są osobniki z najlepszą wartością funkcji przystosowania, przy czym stosowany jest *elitaryzm* najlepsze osobniki przechodzą do kolejnego pokolenia bez zmian, co zapewnia że najlepsze znalezione rozwiązanie nigdy nie zniknie.

6.2.6. Warunek zatrzymania

W algorytmie genetycznym zastosowano dwa warunki stopu. Jednym z nich jest znalezienie rozwiązania, co dzieje się przy osiągnięciu przez funkcję przystosowania wartości 0. Drugim warunkiem jest brak poprawy najlepszego wyniku przez ustaloną liczbę G kolejnych pokoleń. Dyskretność funkcji przystosowania gwarantuje, że warunek ten zawsze zajdzie po liniowej (względem n) liczbie pokoleń. Liczba popraw jest ograniczona przez $2n - 1$ (n dla $L(\pi)$ i $n - 1$ dla $F(\pi)$), a między kolejnymi poprawami upływa co najwyżej G pokoleń, więc dla stałego G jest ona rzędu $O(n)$.

7. Wyniki

7.1. Środowisko eksperymentalne

Eksperymenty obliczeniowe przeprowadzono na losowo generowanych instancjach n dronów rozmieszczonych na kwadracie o boku 1000, z jedną stacją bazową umieszczoną w narożniku o współrzędnych 0, 0

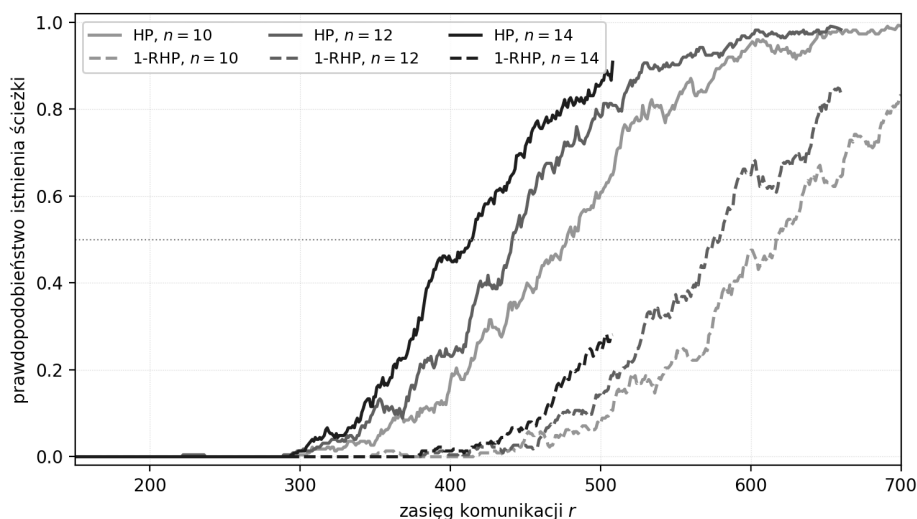
7.2. Zależności pomiędzy liczbami ścieżek

W celu oszacowania klasycznych i 1-odpornych liczb ścieżek Hamiltona za pomocą algorytmu dokładnego obliczono liczbę wszystkich takich ścieżek dla liczby dronów $n \in \{10, \dots, 19\}$ oraz zasięgów komunikacji r od 10 do 700 z krokiem 1, przy czym dla dużych wartości n i r z powodu ograniczeń czasowych dla algorytmu dokładnego wyników nie uzyskano. Dla każdej kombinacji parametrów wygenerowano 15 różnych instancji, łącznie otrzymano ponad 80000 przypadków.

7.2.1. Zależność od zasięgu komunikacji

Parametrami bezpośrednio wpływającymi na możliwość utworzenia klasycznej czy też 1-odpornej ścieżki Hamiltona jest liczba dronów (wierzchołków) i zasięg komunikacji (promień dysku jednostkowego). Rysunek 2 przedstawia prawdopodobieństwo istnienia zwykłej i 1-odpornej ścieżki Hamiltona. Obie rodziny krzywych mają cha-

rakter progowy, a wymóg odporności wyraźnie przesuwą próg w kierunku większego zasięgu. Na podstawie wartości progów można ocenić koszt utrzymania 1-odporności: próg istnienia zwykłych ścieżek Hamiltona znajduje się w okolicach zasięgu równego 300, a dla ścieżek 1-odpornych równego około 400, przy czym podobne przesunięcie utrzymuje się także dla wyższych wartości prawdopodobieństwa. Oznacza to, że aby zapewnić sieci 1-odporność, należy wydłużyć zasięg komunikacji dronów o około jedną trzecią.



Rys. 2. Prawdopodobieństwo istnienia ścieżki Hamiltona (linie ciągłe) oraz 1-odpornej ścieżki Hamiltona (linie przerywane) w funkcji zasięgu komunikacji r , dla wybranych n (średnia krocząca po r)

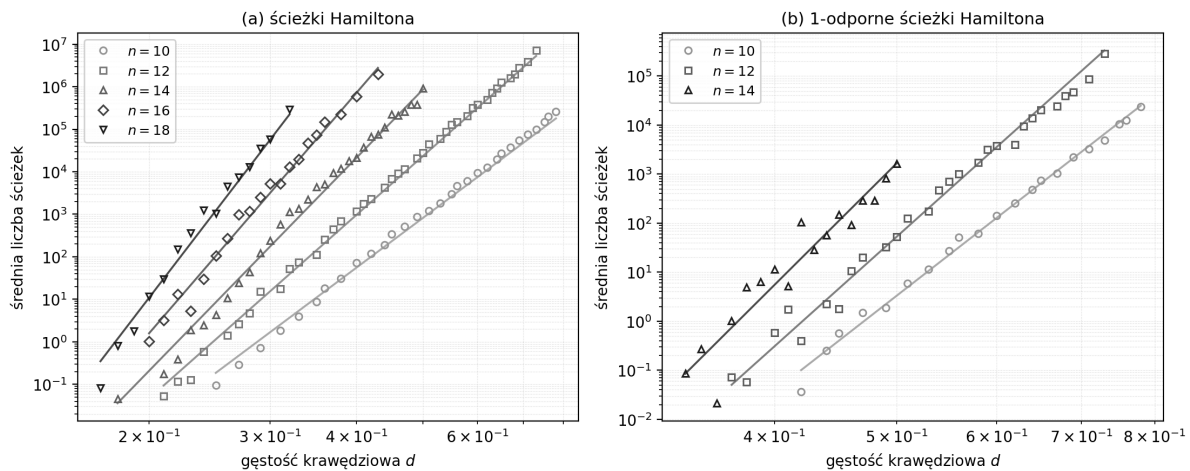
7.2.2. Zależność liczby ścieżek od gęstości krawędziowej

Zależność w funkcji promienia zasięgu mocno zależała od losowej geometrii układu - trudno wskazać proste zależności. Dużo wygodniejsze analitycznie okazują się zależności w funkcji gęstości krawędziowej.

Gdy przedstawić zależności liczby ścieżek Hamiltona zwykłych i 1-odpornych w podwójnej skali logarytmicznej (rysunek 3) to dla każdej wartości n układu się on wzdłuż linii prostej, co wskazuje na zależność potęgową oczekiwanej liczby ścieżek Hamiltona $E[\#HP] \approx a \cdot d^b$, przy czym oczywiście dla grafu pustego liczba ta wynosi 0, a dla grafu pełnego wynosi ona $n!$ (liczba permutacji wierzchołków). Analogicznie do wyników dotyczących liczby cykli Hamiltona w grafach losowych [6, 3], można założyć więc, że liczba oczekiwanych ścieżek Hamiltona może być wyrażona w postaci:

$$E[\#HP](n, d) = n! \cdot d^{b(n)}, \quad (1)$$

Wartości wykładnika $b(n)$, wyznaczone przez dopasowanie modelu (1) do danych eksperymentalnych przedstawionych na rysunku 3 zawarto w tabeli 1 - osobno dla ścieżek Hamiltona (HP) oraz ścieżek 1-odpornych ($1 - RHP$), wraz ze współczynnikami determinacji R^2 obrazującymi jakość dopasowania.



Rys. 3. Średnia liczba (a) ścieżek Hamiltona oraz (b) 1-odpornych ścieżek Hamiltona w funkcji gęstości krawędziowej d (podwójna skala logarytmiczna). Punkty – średnie z instancji o danej gęstości, linie – dopasowania modelu $n! \cdot d^{b(n)}$

Tabela 1
Wykładniki $b(n)$ oczekiwanej liczby ścieżek $n! \cdot d^{b(n)}$, oraz współczynniki determinacji R^2 obrazujące jakość dopasowania.

liczba dronów n	ścieżki Hamiltona (HP)		ścieżki 1-odporne (1-RHP)	
	wykładnik $b(n)$	współczynnik determinacji R^2	wykładnik $b(n)$	współczynnik determinacji R^2
10	12,11	0,995	20,06	0,994
11	13,24	0,996	21,80	0,975
12	14,31	0,997	23,10	0,990
13	15,47	0,996	23,89	0,965
14	16,58	0,992	25,39	0,910
15	17,71	0,994	—	—
16	18,74	0,988	—	—
17	19,80	0,991	—	—
18	21,10	0,986	—	—
19	22,19	0,984	—	—

Dla wszystkich zebranych danych wyniki te, kształtują się następująco:

$$E[\#HP](n, d) = n! \cdot d^{1,117n+0,931}, R^2 = 0,9979 \quad (2)$$

$$E[\#RHP](n, d) = n! \cdot d^{1,397n+6,170}, R^2 = 0,9828 \quad (3)$$

Dopasowane ułamkowe wartości współczynników nie wydają się mieć logicznej interpretacji, bardziej wartościowe wydają się modele o współczynnikach całkowitych. Kosztem drobnego pogorszenia jakości dopasowania otrzymujemy wówczas:

$$E[\#HP](n, d) = n! \cdot d^{n+3}, R^2 = 0,9946 \quad (4)$$

$$E[\#RHP](n, d) = n! \cdot d^{2n-2}, R^2 = 0,9675 \quad (5)$$

Zestawiając uzyskane wyniki z modelem niezależnych krawędzi, to ścieżka Hamiltona wymaga dla n dronów i 1 stacji bazowej n krawędzi, więc gdyby krawędzie występowały niezależnie z prawdopodobieństwem d , oczekiwana liczba ścieżek wynosiłaby $n! \cdot d^n$. Obserwowany wykładnik $\approx n + 3$ oznacza, że dla losowych grafów UDG geometryczne skorelowanie krawędzi działa tu na niekorzyść, co jest spójne z wcześniejszymi obserwacjami [9]. Dla 1-odpornych ścieżek Hamiltona zależność ta jest bliska $n! \cdot d^{2n-2}$, dla łącznej liczby krawędzi (zwykłych i zapasowych) wymaganych przez warunki (i) i (ii) 1-odporności ścieżki Hamiltona równej $2n - 1$. Jest to więc wartość pomniejszona o 1, w stosunku do tego, jak wynikałoby to z modelu niezależnych krawędzi dla $2n - 1$ wymaganych połączeń, co za tym idzie prawdopodobieństwo byłoby więc większe. Przy czym badane ilości instancji z 1-odporną ścieżką Hamiltona dla $n > 14$ były zbyt małe dla analiz, a ich ogólna liczba dużo mniejsza od przypadków ze zwykłą ścieżką Hamiltona, i być może należałoby pogłębić te analizy dla większej liczby danych.

7.3. Porównanie algorytmu genetycznego z dokładnym

W celu oceny jakości wyników algorytm genetyczny porównano z algorytmem dokładnym. Algorytm dokładny służył jako punkt odniesienia, gdzie dla mniejszych instancji było możliwe znalezienie wyniku. Przy czym brak znalezienia rozwiązania przez algorytm dokładny występował również w przypadku przekroczenia limitu czasu dla obliczeń. Podobnie brak rozwiązania po stronie algorytmu genetycznego oznacza jedynie, że heurystyka nie znalazła go dla przyjętych parametrów.

Wyniki porównania przedstawiono w tabeli 2. Wartość „znaleziono wynik” oznacza znalezienie poprawnej 1-odpornej ścieżki Hamiltona. Porównanie przeprowadzono na blisko 40 tysiącach instancji o liczbie dronów n od 20 do 99 oraz zasięgu komunikacji r od 200 do 600.

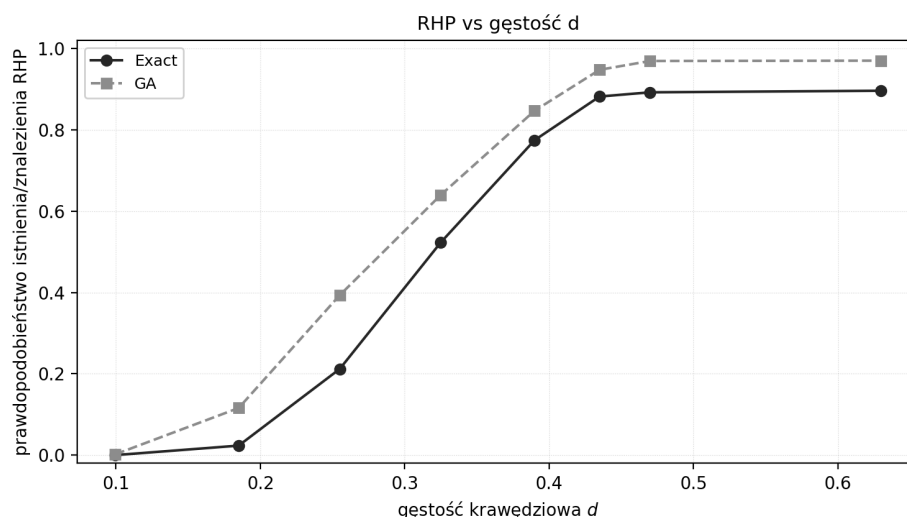
Tabela 2

Porównanie wyników algorytmu dokładnego i algorytmu genetycznego.

	Algorytm genetyczny Nie znaleziono wyniku	Algorytm genetyczny Znaleziono wynik
Algorytm dokładny Nie znaleziono wyniku	15 005	3 500
Algorytm dokładny Znaleziono wynik	212	19 775

W większości przypadków wyniki obu algorytmów były zgodne - dla 19 775 instancji oba algorytmy znalazły 1-odporną ścieżkę Hamiltona, natomiast dla 15 005 instancji żaden z nich jej nie znalazł (nie rozstrzyga to jednak czy ona istniała czy nie). Rozbieżności wystąpiły w 3 712 przypadkach, przy czym jedynie w 212 (tj.: 0,6%) przypadkach to algorytm dokładny, w swoim limicie czasu, znalazł rozwiązanie, którego nie znalazł algorytm genetyczny. Wynik ten pokazuje praktyczną użyteczność podejścia heurystycznego, zwłaszcza dla trudniejszych instancji, w których pełne przeszukiwanie przestrzeni permutacji jest kosztowne. Średnie czasy obliczeń obu algorytmów były

rzędu 1 s (1,64 s dla algorytmu genetycznego i 0,61 s dla dokładnego), przy czym algorytm dokładny zyskiwał przewagę dla *łatwych* błędnych instancji, gdzie z powodu małej liczby wierzchołków lub krawędzi, mógł przeszukać całą poprawną przestrzeń i wykluczyć istnienie rozwiązania (3,85 s dla algorytmu genetycznego i 0,83 s dla dokładnego - w 39 % przypadków). Przy wykluczeniu przypadków, w których nie można było znaleźć 1-odpornej ścieżki Hamiltona, czasy układają się korzystnie dla algorytmu genetycznego (0,25 s dla algorytmu genetycznego i 0,48 s dla dokładnego - w 61 % przypadków).



Rys. 4. Prawdopodobieństwo istnienia lub znalezienia 1-odpornej ścieżki Hamiltona w zależności od gęstości krawędziowej d .

Zależności skuteczności obu algorytmów od liczby wierzchołków lub zasięgu komunikacji, mocno zależą od geometrii wylosowanej instancji. Zależność od gęstości krawędziowej grafu natomiast eliminuje ten problem, dzięki czemu jest bardzo czytelna (rysunek 4). Wraz ze wzrostem gęstości d rośnie prawdopodobieństwo znalezienia 1-odpornej ścieżki Hamiltona zarówno przez algorytm dokładny, jak i genetyczny. Krzywa dla algorytmu genetycznego przebiega nieco wyżej, co jest zgodne z wynikami z tabeli 2: dla części instancji heurystyka znajduje rozwiązanie, którego algorytm dokładny nie znajduje w przyjętym limicie czasu.

8. Podsumowanie

W pracy sformułowano problem 1-odpornej ścieżki Hamiltona w jednostkowych grafach dyskowych, co było motywowane projektowaniem odpornej topologii sieci dronów, wykorzystujących komunikację optyczną, o dwóch łączach na węzeł i z pojedynczą stacją bazową. Odporność oparto na lokalnej rekonfiguracji, czyli kompensowaniu awarii drona bezpośrednim połączeniem pomiędzy jego sąsiadami, bez potrzeby przebudowy pozostałych części sieci. Eksperymenty na ponad 80 tysiącach instancji wykazały potęgową zależność oczekiwanej liczby ścieżek obu typów (tj. zwykłej ścieżki Hamiltona i 1-odpornej ścieżki Hamiltona) od gęstości krawędziowej, zgodną z modelem $n! \cdot d^{b(n)}$. Dane te pozwoliły również oszacować koszt uzyskania 1-odporności, na około 1/3 dodatkowego zasięgu komunikacji. Silne podobieństwo problemu 1-odpornej

ścieżki Hamiltona do klasycznego problemu ścieżki Hamiltona sugerowało również NP-zupełność problemu 1-odpornej ścieżki Hamiltona, z tego powodu do rozwiązania problemu opracowano algorytm genetyczny z dedykowanym operatorem krzyżowania zachowującym sąsiedztwa istotne dla odporności. Algorytm ten pomiął rozwiązanie znalezione przez algorytm dokładny jedynie w 0,6% przypadków, przy krótszym czasie obliczeń dla instancji rozwiązywalnych.

LITERATURA

1. Clark B. N., Colbourn C. J., Johnson D. S.: Unit disk graphs, *Discrete mathematics*, 1990, vol. 86(1-3) p. 165–177.
2. Ebrahimi M., Daneshtalab M., Plosila J.: Fault-tolerant routing algorithm for 3D NoC using hamiltonian path strategy, 2013 Design, Automation & Test in Europe Conference & Exhibition, 2013, vol. p. 1601–1604.
3. Glebov R. Krivelevich M.: On the number of Hamilton cycles in sparse random graphs, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 2013, vol. 27(1) p. 27–42.
4. Itai A., Papadimitriou C. H., Szwarcfiter J. L.: Hamilton paths in grid graphs, *SIAM Journal on Computing*, 1982, vol. 11(4) p. 676–686.
5. Janji S., Wawrzyniak P., Formanowicz P., Kliks A.: Deploying UAV-enabled base stations: QoS-aware joint fronthaul and directional backhaul design. Submitted for publication 2026.
6. Janson S. The numbers of spanning trees, Hamilton cycles and perfect matchings in a random graph, *Combinatorics, Probability and Computing*, vol. 3(1) p. 97–126.
7. Michalewicz Z. Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs, Springer Berlin, Heidelberg 1996.
8. Su H., Shih Y.-K., Kao S.-S.: On the 1-fault hamiltonicity for graphs satisfying Ores theorem, *Information Processing Letters*, 2012, vol. 112(21) p. 839–843.
9. Wawrzyniak P. Formanowicz P.: W: Świerniak A. Krystek J., editors Automatyizacja procesów dyskretnych. Teoria i zastosowania Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, 2024, p. 285–292.