

Marek KUBALE
Uniwersytet Morski w Gdyni

O PROBLEMIE SUMY CHROMATYCZNEJ GRAFU

Streszczenie. *Suma chromatyczna* $\chi_{\Sigma}(G)$ jest najmniejszą możliwą sumą kolorów spośród wszystkich legalnych pokolorowań wierzchołków grafu G liczbami naturalnymi. Pokolorowanie realizujące taką sumę nazywamy *najlepszym*. W niniejszej notce zawarto najważniejsze fakty dotyczące problemu sumarycznego kolorowania grafów. W szczególności są to wnioski płynące z analizy najbardziej znanych algorytmów kolorowania klasycznego przy-stosowanych do potrzeb kolorowania sumarycznego.

ON THE PROBLEM OF CHROMATIC SUM OF A GRAPH

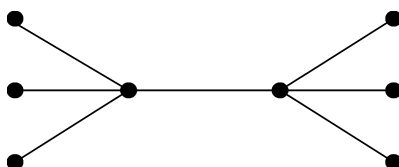
Summary. The *chromatic sum* $\chi_{\Sigma}(G)$ is the smallest possible sum of all legal vertex colorings of graph G with natural numbers. In this note we gathered the main facts concerning the chromatic sum coloring problem. In particular, these are conclusions drawn from adapting the most popular classical algorithms to summary coloring of graphs.

1. Wprowadzenie

Potrzeba zajmowania się tym wariantem kolorowania wynika z jego zastosowań w szeregowaniu identycznych zadań, w przydziale zasobów a nawet w projektowaniu ścieżek połączeniowych w obwodach drukowanych [8]. W istocie, poszukiwanie uszeregowień minimalizujących całkowity czas zakończenia zadań bądź minimalizujących średni czas przepływu zadań sprowadza się do sumacyjnego kolorowania grafu konfliktów zadaniowych.

Niestety, obliczenie wartości $\chi_{\Sigma}(G)$ jest problemem NP-trudnym. Pomimo że istnieją całe rodziny grafów podatnych na kolorowanie sumacyjne, np. drzewa, grafy 2-dzielne stopnia $\Delta \leq 4$ [3], w praktyce zmuszeni jesteśmy korzystać z istniejących algorytmów wielomianowych kolorowania suboptymalnego zaadaptowanych do potrzeb kolorowania sumacyjnego. Wydawać by się mogło, że najlepsze pokolorowanie uzyskamy, gdy otrzymamy pokolorowanie chromatyczne, a następnie pomalujemy wierzchołki największego zbioru niezależnego kolorem 1, drugiego największego kolorem 2 itd. Jednakże Kubicka i Schwenk [7] pokazali, że nawet drzewa, czyli grafy 2-chromatyczne mogą wymagać więcej niż dwóch kolorów dla uzyskania pokolorowania najlepszego (rys. 1). Co więcej, dla każdego naturalnego k istnieje drzewo T_k wymagające k kolorów dla osiągnięcia sumy chromatycznej $\chi_{\Sigma}(T_k)$.

Przedstawiony przykład sugeruje, że znalezienie największego zbioru niezależnego i pomalowanie jego wierzchołków kolorem 1 itd., rozwiązałoby problem. Jednakże znalezienie takiego zbioru jest problemem NP-trudnym. Dlatego zmuszeni jesteśmy zastosować algorytm heurystyczny, tzw. *Greedy Independent Sets (GIS)*. Jak pokazuje rysunek 2, takie podejście również nie gwarantuje znalezienia najlepszego rozwiązania. Dlatego każdy algorytm klasyczny musimy zakończyć procedurą korygującą *Plus*, która sortuje kolory od największego do najmniejszego. Ale istnieją również inne techniki poprawiania pokolorowań.

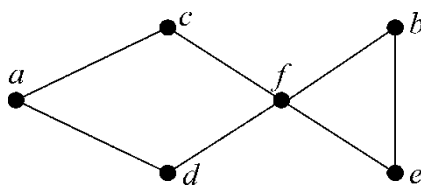


Rys. 1. Dwugwiazda $S_{3,3}$ wymagająca wprowadzenia 3. koloru dla uzyskania pokolorowania sumacyjnie najlepszego.

Ponieważ problem jest NP-trudny, skazani jesteśmy również na posługiwanie się szybkimi oszacowaniami sumy chromatycznej. W [10] pokazano, że dla każdego G o n wierzchołkach i m krawędziach mamy

$$\lceil \sqrt{8m} \rceil \leq \chi_{\Sigma}(G) \leq \lfloor 3(m+1)/2 \rfloor \quad (1)$$

Inne oszacowania sumy dotyczą szczególnych klas grafów i niektórych niezmienników grafowych.



Rys. 2. Przykład pokazujący, że zbiór maksymalny $\{a, b\}$ nie jest największy w sensie mocy.

2. Algorytmy

Najbardziej znane metody klasycznego kolorowania grafów to algorytmy sekwencyjne takie jak *LF*, *SL* i *SLF* oraz algorytm zbiorów niezależnych *GIS*. Algorytmy te musimy korygować liniową procedurą *Plus*, która sortuje kolory *post factum* [5]. Dlatego będziemy je nazywali LF^+ , SL^+ , SLF^+ i GIS^+ .

W algorytmie LF^+ (ang. *Largest-First*) wierzchołki są porządkowane według stopni, a następnie kolorowane zachłannie [11]. Jego złożoność to $O(m+n)$, zaś funkcja dobroci (ang. *performance guarantee*) jest liniowa $O(n)$. Algorytm nie radzi sobie nawet ze ścieżkami, np. z P_6 .

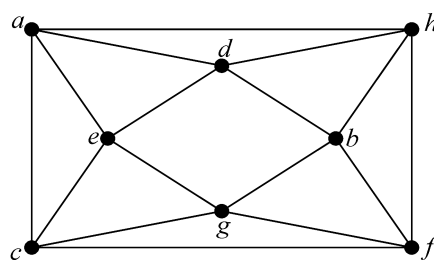
W metodzie SL^+ (ang. *Smallest-Last*) [9] wierzchołki są porządkowane jako $v_1, \dots, v_n$ w taki sposób, że dla każdego $i = 1, \dots, n$ v_i ma minimalny stopień w podgrafie

grafu G indukowanym przez wierzchołki $v_1, \dots, v_i$. Zachłanny algorytm SL^+ można zrealizować w czasie $O(m+n)$, zaś funkcja dobroci jest również liniowa. Algorytm ten radzi sobie dobrze z grafami planarnymi, ale nie potrafi pomalować optymalnie drzewa $S_{3,3}$ (rys. 1).

Dynamiczny sposób porządkowania wierzchołków zaproponował Brèlaz [1]. W algorytmie SLF^+ (ang. *Saturation LF^+*) jako v_i bierzemy wierzchołek o największym stopniu i przydzielamy mu kolor 1, a następnie dla każdego $i = 2, \dots, n$ jako v_i wybieramy wierzchołek o największym stopniu nasycenia i kolorujemy go najniższym możliwym kolorem. Algorytm SLF^+ może być wykonany w czasie $O((m+n)\log n)$. Jego funkcja dobroci to $O(n)$. Algorytm ten optymalnie koloruje grafy 2-dzielne.

Zupełnie inne podejście zaprezentował Johnson w [4]. W metodzie tej malujemy całe zbiory wierzchołków niezależnych identycznymi kolorami. Ponieważ do kolejnych kolorów wierzchołki dobieramy w sposób zachłanny, więc metodę tę nazywamy GIS (ang. *Greedy Independent Sets*). Algorytm GIS^+ ma złożoność $O(mn)$. Jego funkcja dobroci to $O((n+\log^2 n)/n)$. Niestety algorytm Johnsona nie radzi sobie nawet z drzewami a nawet z P_4 .

Nasuwa się pytanie, czy istnieje taki mały graf, który nie gwarantuje optymalnego pokolorowania przez żaden z tych algorytmów? Graf z rysunku 3, zwany *pryzmatoidem*, jest właśnie takim grafem. Graf ten jest tzw. HC (ang. *hard-to-color*) dla klasycznego algorytmu SL [6]. Oznacza to, że każde jego użycie kończy się 5-kolorowaniem o sumie $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 21$. Pokolorowanie takie nie może być skorygowane procedurą $Plus$, więc pryzmatoid jest też HC dla algorytmu SL^+ . Ponadto, graf ten jest regularny, więc istnieje 8! sekwencji LF , niektóre z nich prowadzą do pokolorowań optymalnych, a inne nie. A więc pryzmatoid jest trudny dla LF i LF^+ . Taka sama sytuacja może zaistnieć przy wykonaniu algorytmu SLF i SLF^+ , jeżeli proceduje on według kolejności: a, h, d, e, b, g, c, f . Wreszcie algorytm GIS może zacząć kolorowanie od wybrania pary $\{d, g\}$, a następnie pary $\{e, f\}$. W tym momencie pozostaje mu pokolorować ścieżkę c, a, h, b , na co może przeznaczyć kolory odpowiednio: 3, 4, 5, 3. W efekcie zwróci ostateczne 5-pokolorowanie o sumie 21. Czytelnik może sprawdzić, że $\chi_2(\text{pryzmatoid}) = 20$ ($1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2$).



Rys. 3. Żaden z algorytmów rozważanych w niniejszej pracy nie jest w stanie zagwarantować optymalnego pokolorowania sumacyjnego powyższego grafu.

LITERATURA

1. Brèlaz D.: New methods to color the vertices of a graph, *Comm. ACM*, vol. 22, 1977, 251-256.
2. Erdős P., Kubicka E., Schwenk A.J.: Graphs that require many colors to achieve their chromatic sum, *Congr. Numer.*, vol. 71, 1990, p.17-28.
3. Giaro K., Kubale M.: A note on polynomial algorithm for cost coloring of bipartite graphs with $\Delta \leq 4$, *Disc. Math. Graph Theory*, vol. 40, 2020, p.885-891.
4. Johnson D.S.: Approximation algorithms for combinatorial problems, *J. Comp. Syst. Sci.*, vol. 9, 1974, p.256-278.
5. Kubale M., Kamedulski B.: Analysis of greedy algorithms for chromatic sum coloring of a graph (przedłozone do druku).
6. Kubale M., Pakulski J., Piwakowski K.: The smallest hard-to-color graph for the SL algorithm, *Disc. Math.*, vol. 164, 1997, p.197-212.
7. Kubicka E., Schwenk A.J.: An introduction to chromatic sums, *Proc. 7th Ann. ACM Computer Science Conf.*, ACM Press, 1989, 39-45.
8. Małafiejski M.: Sum coloring of graphs, w: *Graph Coloring, Contemporary Mathematics*, vol. 352, 2004, p.55-65.
9. Matula D.W., Marble G., Isaacson D.: *Graph Theory and Computing*, Academic Press, New York, 1972, 109-122.
10. Thomassen C. i in.: Tight bounds on the chromatic sum of a connected graph, *J. Graph Theory*, vol. 13, 1989, p.353-357.
11. Welsh D.J., Powell M.B.: An upper bound for the chromatic number of a graph and its application to timetabling problem, *Comp. J.*, vol. 10, 1967, p.85-86.