Piotr WAWRZYNIAK, Piotr FORMANOWICZ
Politechnika Poznańska

ZNAJDOWANIE ŚCIEŻKI HAMILTONA W GRAFACH GEOMETRYCZNYCH Z OGRANICZENIEM ODLEGŁOŚCI*

Streszczenie. Niniejsza praca dotyczy problemu ścieżki Hamiltona w grafach unit disk, gdzie wierzchołki są umieszczone w przestrzeni euklidesowej, a krawędzie tworzą się między wierzchołkami znajdującymi się w określonej odległości. Te ograniczenia czynią problem odmiennym od klasycznego problemu ścieżki Hamiltona. Praktyczne zastosowanie tego problemu można znaleźć w sieciach dronów wykorzystujących komunikację optyczną (FSO), gdzie każdy dron może łączyć się jedynie z dwoma innymi ze względu na ograniczenia sprzętowe. Wymóg połączenia wszystkich dronów tworzy tu problem znajdowania ścieżki Hamiltona. Problem ten, podobnie jak w wielu innych typach grafów, wydaje się trudny obliczeniowo. W celu rozwiązania tego problemu zastosowano algorytm tabu search, heurystyczną metodę dostosowaną do przeszukiwania dużych przestrzeni rozwiązań, co czyni ją obiecującym podejściem do wspomnianego problemu.

FINDING A HAMILTON PATH IN GEOMETRICAL GRAPHS WITH A DISTANCE CONSTRAIN

Summary. This study addresses the Hamiltonian path problem in geometric graphs, where vertices are located in Euclidean space and edges are formed between vertices within a specified distance. These constraints make the problem distinct from the classical Hamiltonian path problem. A practical application of this can be found in drone networks using Free-Space Optical (FSO) communication, where each drone is limited to connecting with only two others due to equipment constraints, creating a network that requires a Hamiltonian path for complete connectivity. As with many Hamiltonian path problems in various graph types, this problem appears computationally difficult. To tackle this challenge, we apply the tabu search algorithm, a heuristic approach well-suited for exploring large search spaces, making it a promising solution for this problem.

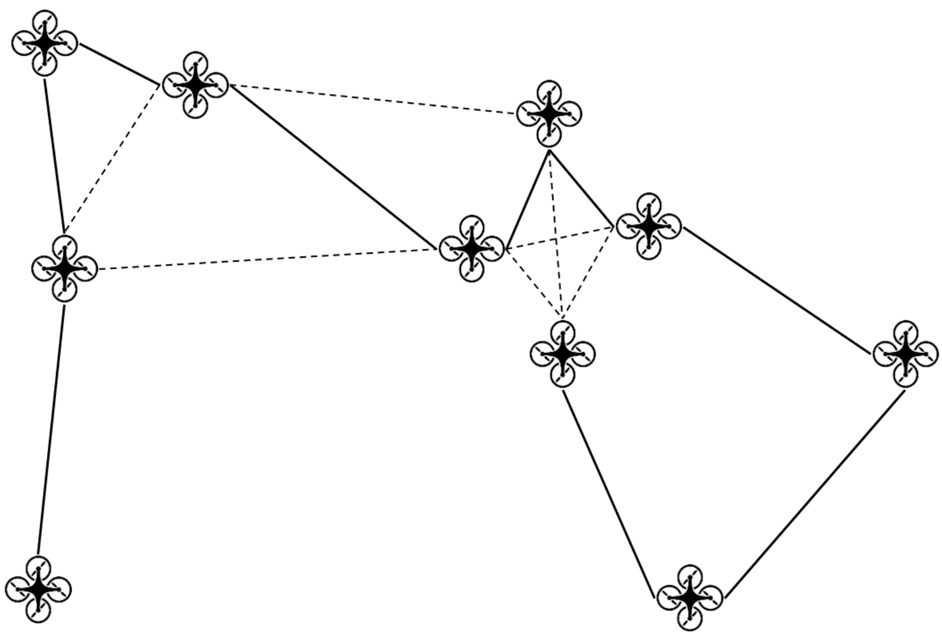
1. Wprowadzenie

Problem ścieżki Hamiltona polega na znalezieniu takiej ścieżki w grafie, która przechodzi przez każdy wierzchołek dokładnie raz. Jest to jedno z kluczowych zagadnień w teorii grafów, należące do klasy problemów NP-zupełnych [3], co oznacza, że jego rozwiązanie staje się w praktyce trudne w przypadku dużych grafów. Ścieżki

*Praca częściowo sfinansowana ze środków statutowych Politechniki Poznańskiej.

Hamiltona mają wiele zastosowań, od logistyki w projektowaniu tras [10], aż do bioinformatyki, np. w badaniach nad sekwencjonowaniem DNA, gdzie do rekonstrukcji pełnych sekwencji DNA z fragmentów (reads) również wykorzystuje się problem ścieżki Hamiltona [1].

Problem ścieżki Hamiltona jest szeroko opisywany w literaturze, lecz w tej pracy skupimy się na specyficznym typie grafów inspirowanym problemem łączności w sieciach dronów wykorzystujących komunikację Free Space Optics (FSO) [6] . Drony, ze względu na ograniczenia kosztowe/energetyczne/wagowe, są wyposażone w minimalną liczbę urządzeń do komunikacji optycznej – zazwyczaj dwa. To powoduje, że każda z nich może łączyć się tylko z dwoma innymi dronami, co naturalnie prowadzi do tworzenia ścieżki Hamiltona, gdzie każdy dron jest częścią ścieżki bez powtarzania węzłów (przykład na rysunku 1).



Rys. 1. Graf stworzony przez drony wykorzystujące komunikację FSO z przykładową ścieżką Hamiltona będącą realizacją tej komunikacji

Położenie tych wierzchołków można opisać w przestrzeni euklidesowej. Dla obiektów poruszających się w powietrzu, takich jak drony, można pominąć przeszkody terenowe, więc ich połączenia są ograniczone wyłącznie przez maksymalny zasięg urządzeń. Tworzy to szczególny typ grafów, które położone są w przestrzeni euklidesowej, a istnienie krawędzi uzależnione jest od odległości pomiędzy wierzchołkami, grafy takie określane są w literaturze mianem jednostkowych grafów dyskowych [2].

2. Problem ścieżki Hamiltona

Problem ścieżki Hamiltona polega na znalezieniu w grafie ścieżki, która odwiedza każdy wierzchołek dokładnie raz.

2.1. Formalna definicja

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem, gdzie V jest zbiorem wierzchołków, a E zbiorem krawędzi. Ścieżka Hamiltona to taka ścieżka w grafie G, która odwiedza każdy wierzchołek $v \in V$ dokładnie raz. Problem ścieżki Hamiltona (w wersji decyzyjnej) polega na ustaleniu, czy istnieje taka ścieżka w grafie G, czyli czy istnieje permutacja wierzchołków, która tworzy ścieżkę zgodnie z powyższą definicją.

2.2. Złożoność obliczeniowa

Problem ścieżki Hamiltona jest klasycznym przykładem problemu trudnego obliczeniowo [3]. Należy on do klasy problemów NP-zupełnych, co oznacza, że dla grafów ogólnych (tj. grafów bez żadnych dodatkowych ograniczeń) nie istnieje znany algorytm rozwiązujący ten problem w czasie wielomianowym dla wszystkich przypadków. Złożoność problemu wynika z faktu, że liczba możliwych ścieżek w grafie rośnie wykładniczo wraz z liczbą wierzchołków. Dla grafu o n wierzchołkach istnieje $n!$ możliwych permutacji wierzchołków, co sprawia, że pełne przeszukiwanie staje się niepraktyczne nawet dla średniej wielkości grafów.

2.3. Znaczenie w praktyce

Pomimo swojej teoretycznej trudności, problem ścieżki Hamiltona znajduje zastosowanie w wielu rzeczywistych scenariuszach, takich jak optymalizacja tras w logistyce, planowanie ścieżek w robotyce, projektowanie układów elektronicznych oraz analizy biologiczne, np. w sekwencjonowaniu genomów.

3. Jednostkowe grafy dyskowe

Jednostkowy graf dyskowy [2] to graf geometryczny, w którym wierzchołki odpowiadają punktom na płaszczyźnie euklidesowej, a krawędź między dwoma wierzchołkami istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im dyski o promieniu 1 przecinają się. Oznacza to, że dwa wierzchołki są połączone krawędzią, gdy odległość euklidesowa między nimi jest mniejsza lub równa 2. Formalnie, dla grafu $G = (V, E)$, każdy wierzchołek $v_i \in V$ reprezentuje środek dysku o promieniu 1, a krawędź $e_{ij} \in E$ istnieje, jeśli $d(v_i, v_j) \leqslant 2$, gdzie $d(v_i, v_j)$ to odległość między wierzchołkami v_i i v_j.

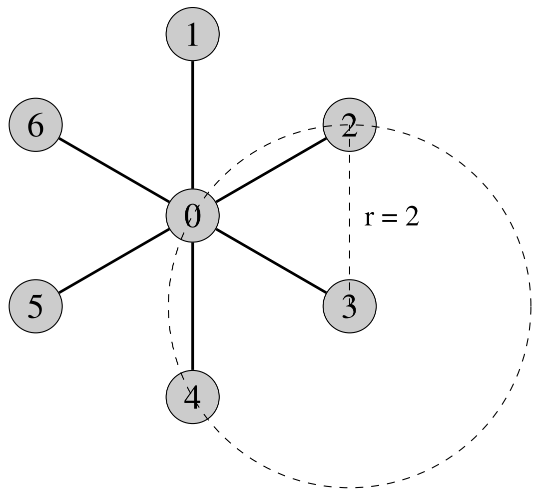
Choć w jednostkowych grafach dyskowych promień dysków jest zwykle jednostkowy, odległość ta może być interpretowana jako dowolna stała wartość. W takim przypadku, graf zachowuje swoją strukturę geometryczną.

3.1. Własności jednostkowych grafów dyskowych

Ze względu na to, że krawędzie w jednostkowych grafach dyskowych są ograniczone przez odległość między wierzchołkami, ten typ grafów różni się od grafów ogólnych, gdzie połączenia mogą istnieć niezależnie od położenia wierzchołków. Ograniczenie związane z odległością sprawia, że jednostkowe grafy dyskowe mają zastosowanie w modelowaniu sieci bezprzewodowych, sieci sensorowych, czy sieci dronów, gdzie zasięg komunikacji między węzłami jest ograniczony.

3.2. Przykład minimalnego jednostkowego grafu dyskowego

Jednym z ciekawych przykładów jest graf gwiazdy o stopniu 6. W przypadku ogólnym taki graf jest łatwy do narysowania – wierzchołek centralny łączy się z sześcioma innymi wierzchołkami, tworząc strukturę gwiazdy (przykład na rysunku 2). Jednak w jednostkowych grafach dyskowych taka konfiguracja jest niemożliwa do odwzorowania, ponieważ sześć wierzchołków musiałoby znajdować się w odległości mniejszej niż 2 od wierzchołka centralnego, a jednocześnie w odległości większej niż 2 od siebie nawzajem. W dwuwymiarowej przestrzeni euklidesowej takie rozmieszczenie wierzchołków jest niemożliwe, co pokazuje, że jednostkowe grafy dyskowe mają bardziej rygorystyczne ograniczenia niż grafy ogólne.



Rys. 2. Graf gwiazdy o stopniu 6, który nie może być jednostkowym grafem dyskowym.

Ze względu na swoje ograniczenia przestrzenne, jednostkowe grafy dyskowe mają zastosowanie w projektowaniu sieci bezprzewodowych oraz optymalizacji połączeń w sieciach sensorowych, gdzie zasięg komunikacji zależy od odległości między węzłami.

4. Ścieżki Hamiltona w jednostkowych grafach dyskowych

Problem ścieżki Hamiltona w jednostkowych grafach dyskowych, podobnie jak w grafach ogólnych, wydaje się problemem NP-zupełnym [5]. Oznaczałoby to, że nie istnieje algorytm dokładny rozwiązujący ten problem w czasie wielomianowym dla wszystkich przypadków (jeżeli $P \neq NP$).

Chociaż problem ścieżki Hamiltona w tego rodzaju grafach wydaje się trudny, istnieją wyniki sugerujące, że dla jednostkowych grafów dyskowych, w przypadku których stosunek promieni dysków (największego do najmniejszego) jest ograniczony przez stałą, można uzyskać algorytmy o złożoności $2^{O(\sqrt{n})}$ dla problemu cyklu Hamiltona [7]. Oczywiście, stała ta o wartości wynoszącej 1 oznacza jednostkowe grafy dyskowe. Tego rodzaju podejście jest szczególnie istotne w zastosowaniach praktycznych, takich jak optymalizacja sieci, gdzie geometryczne ograniczenia mają istotny wpływ na efektywność połączeń i trasowania w sieci.

Podana złożoność wywodzi się z interesującego zagadnienie *square root phenomenon* [8]. Badania nad tym zjawiskiem w kontekście grafów planarnych sugerują, że dla wielu problemów, w tym ścieżek Hamiltona, można uzyskać algorytmy o złożoności sub-wykładniczej $2^{O(\sqrt{n})}$. Pytanie, czy to zjawisko może być uogólnione na większe klasy grafów, takich jak grafy dyskowe, jest otwarte. W szczególności grafy dyskowe, w których wnętrza dysków są rozłączne, są równoważne grafom planarnym, co wskazuje na istnienie podobnych właściwości strukturalnych.

5. Rozwiązanie problemu ścieżki Hamiltona za pomocą algorytmu tabu search

Algorytm tabu search [4] jest metaheurystyczną techniką optymalizacyjną, która iteracyjnie przeszukuje przestrzeń rozwiązań, korzystając z pamięci o ostatnich ruchach (zwanej listą tabu), aby unikać zapętlenia w lokalnych minimach. Zaletą algorytmu tabu search jest jego zdolność do efektywnego przeszukiwania dużych przestrzeni rozwiązań i unikania stagnacji w lokalnych minimach.

Do implementacji tego algorytmu użyto biblioteki OptaPlanner [9], narzędzia przeznaczonego do optymalizacji problemów z ograniczeniami. OptaPlanner zapewnia wsparcie dla wielu metaheurystyk, w tym tabu search, a jego zalety, takie jak skalowalność, możliwość automatycznego dostrajania parametrów oraz szeroka gama opcji konfiguracji algorytmów, umożliwiła sprawną implementację pożądanego podejścia.

5.1. Konfiguracja podejścia tabu search

Postać rozwiązania została zdefiniowana jako lista wierzchołków o rozmiarze równym liczbie wierzchołków, tworzących ścieżkę o wymaganej długości. Ponieważ celem było znalezienie jakiegokolwiek poprawnego rozwiązania, jakość rozwiązań nie była różnicowana, zastosowano jedynie twarde ograniczenia. Proces zatrzymywał się po znalezieniu pierwszej poprawnej instancji. Poprawność była natomiast oceniana poprzez sprawdzenie, czy kolejne wierzchołki są połączone krawędzią i czy żaden wierzchołek nie powtarza się.

Aby zwiększyć elastyczność przeszukiwania, poza standardową operacją typu *swap*, kroki algortymu zostały rozrzeszone o możliwość duplikacji wierzchołka, lecz z dodatkową karą równą 1,5 wartości kary za brak krawędzi (tj. -2 za brak krawędzi i -3 za duplikację wierzchołka). Taka modyfikacja pozwalała na wprowadzenie zduplikowanego wierzchołka, jeżeli w zamian zyskano dwie krawędzie na ścieżce, oczywiście w pełnym, poprawnym rozwiązaniu duplikacja musiała zostać usunięta. Ta zmiana przyspieszyła znajdowanie rozwiązań o około 30%, przy jednoczesnym nieistotnym statystycznie (2%) ale wzroście liczby znalezionych wyników.

Użyto również parametrów: EntityTabuSize (liczba ostatnich przemieszczeń bytu uznawanych za tabu) ustawiono na 7, oraz AcceptedCountLimit (limit liczby akceptowanych ruchów przed zakończeniem przeszukiwania lokalnego) na 1000. Jako warunki stopu przyjęto znalezienie wyniku lub ograniczenie czasowe, dostosowywane w zależności od testów.

5.2. Porównanie z algorytmem exhaustive search

W celu oceny jakości wyników, algorytm tabu search został porównany z algorytmem dokładnym (exhaustive search). Ze względu na wykładniczą naturę exhaustive search, również ten algorytm otrzymał ograniczenie czasowe, takie samo jak tabu search.

W konsekwencji mogą wystąpić przypadki, w których algorytm dokładny nie znajdzie rozwiązania mimo jego istnienia. Naszym celem było jednak zbadanie, jak często zdarza się, że to tabu search nie znajdzie wyniku, podczas gdy exhaustive search go znajdzie. Wyniki tego porównania przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1

Porównanie wyników dla tabu search i exhaustive search.

	Tabu search Nie znaleziono wyniku	Tabu search Znaleziono wynik
Exhaustive search Nie znaleziono wyniku	719	507
Exhaustive search Znaleziono wynik	13	4221

Jak widać na podstawie tabeli, tabu search przewyższa exhaustive search pod względem wydajności, uzyskując wyniki w stosunku około 40:1 (dokładnie 507:13). W dalszych pracach planowane jest lepsze dostrojenie parametrów i podejść algorytmu tabu search oraz porównanie go z bardziej zoptymalizowanymi algorytmami dokładnymi.

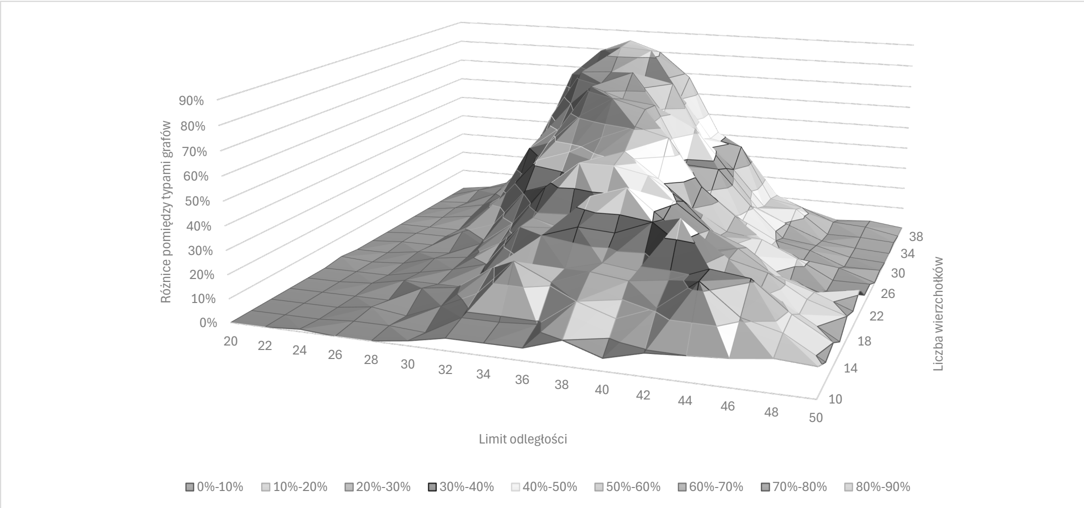
6. Porównanie istnienia ścieżki Hamiltona w jednostkowych grafach dyskowych i grafach losowych

Aby zbadać trudność znalezienia ścieżki Hamiltona w jednostkowych grafach dyskowych, przeanalizowaliśmy takie grafy umieszczone na kwadratowej przestrzeni, przy zmiennej liczbie wierzchołków oraz zmiennej maksymalnej odległości między nimi (wyrażonej procentowo w stosunku do wielkości przestrzeni). Przy takim założeniu, wartość $\sqrt{2}$ definiowała graf pełny.

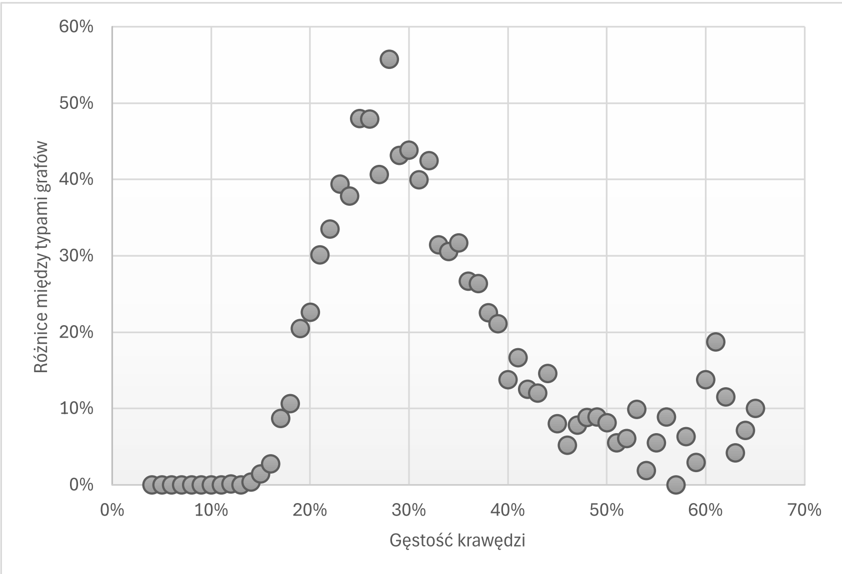
Dla każdego jednostkowego grafu dyskowego wygenerowaliśmy również graf losowy o tej samej liczbie krawędzi. Dla każdej kombinacji liczby wierzchołków i limitu odległości przeprowadziliśmy 100 iteracji, co pozwoliło uśrednić wyniki dotyczące istnienia ścieżek Hamiltona przy danym nasyceniu krawędziami.

Wyniki pokazały, że przy tej samej liczbie krawędzi, grafy losowe częściej zawierały ścieżki Hamiltona w porównaniu do jednostkowych grafów dyskowych (wyniki testów przedstawione są na rysunku 3). Szczególnie dotyczyło to obszarów, gdzie gęstość krawędzi nie determinowała jednoznacznie istnienia lub nie ścieżki Hamiltona, co pokazano na rysunku 4.

Choć ta różnica jest wyraźna, przyczyny tego zjawiska wymagają dalszych badań. Można przypuszczać, że geometria jednostkowych grafów dyskowych utrudnia tworzenie ścieżek Hamiltona w porównaniu do grafów losowych, ponieważ ogranicza połączenia na większe odległości, nie rekompensując tego bardziej gęstą siecią połączeń lokalnych. Pełne wyjaśnienie tego zjawiska wymaga jednak głębszej analizy.



Rys. 3. Wykres przedstawiający o ile bardziej prawdopodobne jest znalezienie ścieżki w grafie losowym, w zależności od liczby wierzchołków i limitu odległości (w procentach wielkości obszaru)



Rys. 4. Wykres przedstawiający o ile bardziej prawdopodobne jest znalezienie ścieżki w grafie losowym, w zależności od gęstości krawędzi w grafie, wyrażonej przez procent wszystkich krawędzi

7. Podsumowanie

W pracy przedstawiono problem ścieżki Hamiltona w jednostkowych grafach dyskowych oraz w grafach losowych, z analizą zależności pomiędzy topologią grafu a istnieniem takich ścieżek. Badania przeprowadzono dla grafów o zmiennej liczbie wierzchołków i limitach odległości, a wyniki wykazały większą częstość ścieżek Hamiltona w grafach losowych o podobnej liczbie krawędzi. Ograniczenia geometryczne jednostkowych grafów dyskowych utrudniają tworzenie takich ścieżek, wymagając dalszych badań nad ich naturą. W przyszłości planowane są badania nad algorytmami poprawiającymi skuteczność ich wykrywania.

LITERATURA

1. Ashton, B.: Graph theory in DNA sequencing: Unveiling genetic patterns. International Journal of Biology and Life Sciences, 2023, vol. 3(1), p. 9–13.
2. Clark, B. N., Colbourn, C. J., and Johnson, D. S.: Unit disk graphs. Discrete Mathematics, 1990, vol. 86(1-3), p.165–177.
3. Garey, M. R., and Johnson, D. S.: Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness, WH Freeman and Company, New York, 1979.
4. Glover, F.: Tabu search: A tutorial. Interfaces, 1990, vol. 20(4), p. 74–94.
5. Itai, Alon, Christos H. Papadimitriou, and Jayme Luiz Szwarcfiter.: Hamilton paths in grid graphs. SIAM Journal on Computing 1982, vol. 11(4), p. 676–686.
6. Janji, S., Wawrzyniak, P., Formanowicz, P., and Kliks, A.: Integrating UAV-Enabled Base Stations in 3D Networks: QoS-Aware Joint Fronthaul and Backhaul Design. arXiv preprint arXiv:2404.17547, 2024.
7. Kisfaludi-Bak, S., and Van Der Zanden, T. C.: On the exact complexity of Hamiltonian cycle and q-colouring in disk graphs. In International Conference on Algorithms and Complexity, Springer International Publishing, 2017, p. 369–380.
8. Marx, D.: The Square Root Phenomenon in Planar Graphs. In ICALP (2), 2013, p. 28.
9. OptaPlanner: OptaPlanner: Solve planning and scheduling problems with OptaPlanner, 2024, https://www.optaplanner.org.
10. Sevaux, M., and Sörensen, K.: Hamiltonian paths in large clustered routing problems. EU/MEeting 2008 workshop on Metaheuristics for Logistics and Vehicle Routing, EU/ME, vol. 8, p. 411–417.