

Marcin RADOM<sup>1,2</sup>, Piotr FORMANOWICZ<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instytut Informatyki, Politechnika Poznańska

<sup>2</sup>Instytut Chemii Bioorganicznej, Polska Akademia Nauk

## OGRANICZANIE PRZESTRZENI STANÓW W ROZSZERZONYCH CZASOWYCH SIECIACH PETRIEGO\*

**Streszczenie.** W niniejszym artykule opisana została koncepcja ograniczania przestrzeni stanów w rozszerzonej czasowej sieci Petriego. Sieć taka integruje właściwości innych znanych sieci czasowych, umożliwiając rozdzielne określenie czasów aktywacji i produkcji w tranzycjach oraz czasu działania i życia tokenów. Problem tak zwanej eksplozji przestrzeni stanów w sieciach Petriego jest skomplikowany. Proponowane w niniejszej pracy podejście pokazuje, że badanie osiągalności stanów w sieci czasowej, dla pewnej ich określonej sekwencji, jest możliwe do wykonania bez kompleksowej analizy przestrzeni stanów. Artykuł przedstawia sposób wykonania analizy sekwencji stanów za pomocą układów nierówności, umożliwiających analizę wykonalności sekwencji od danego stanu początkowego.

## REDUCTION OF THE STATE SPACE IN EXTENDED TIME PETRI NETS

**Summary.** This paper explores the concept of state space reduction in the extended Time Petri Net. This type of net integrates properties of several known time Petri nets, allowing the separate specification of activation and production time bounds for transitions, as well as time intervals assigned to places to define the effective duration and lifespan of tokens. The problem of state space explosion in Petri nets is complex. However, the approach proposed in the paper shows that the study of the reachability of states in the proposed net, for a specific sequence of them, is feasible, without complex state space analysis. The paper demonstrates the analysis of the sequence of states by means of systems of inequations, making it possible to evaluate the feasibility of the sequence from a given initial state.

### 1. Wstęp

Sieci Petriego to jedno z narzędzi stosowanych do modelowania złożonych systemów. Dotyczy to zarówno zaawansowanych systemów przemysłowych, jak i równie skomplikowanych systemów biologicznych. Te ostatnie charakteryzują się szczególnie wysokim stopniem skomplikowania ze względu na liczbę elementów biochemicznych oraz gęstą sieć powiązań między nimi, które reprezentują wzajemne interakcje w komórkach, tkankach i innych strukturach. Analiza systemów biologicznych przy użyciu sieci

\*Praca częściowo sfinansowana ze środków statutowych Politechniki Poznańskiej.

Petriego umożliwia uporządkowanie wiedzy na temat tych systemów oraz formułowanie nowych, interesujących wniosków na temat ich funkcjonowania (por. [2]).

Istnieje wiele rodzajów sieci Petriego, które pozwalają na wprowadzenie dodatkowych danych pochodzących z badań nad danym systemem. Analiza tych sieci dostarcza nowych informacji o naturze modelowanego systemu [3, 5]. Klasyczne sieci Petriego nie pozwalają modelować innych czynników, takich jak czas. W odpowiedzi na to powstały różne rodzaje sieci czasowych. Jednymi z pierwszych były takie, w których przedział czasu przypisany do tranzycji określa, kiedy może ona zostać uruchomiona (sieć TPN, [4]). W innym ważnym rodzaju sieci czasowej (DPN) określony musi być dokładny czas trwania produkcji tokenów przez uruchomioną tranzycję [12]. Zakłada się w nich ponadto, że każda aktywna tranzycja uruchamiana jest natychmiast.

W niniejszym artykule rozważana jest koncepcja ograniczenia przestrzeni stanów w nowym rodzaju sieci, tj. rozszerzonej czasowej sieci Petriego (xTPN, extended time Petri net) [9, 11, 10]. Sieć ta integruje właściwości wielu innych znanych rozszerzeń, umożliwiając określenie górnych i dolnych zakresów czasów aktywacji oraz produkcji w tranzycjach oraz przedziału czasu przypisanego do miejsc, który określa efektywny czas działania i życia tokenów w sieci.

Analiza przestrzeni stanów danej sieci dostarcza ważną i pełną wiedzę o jej zachowaniu [1]. W praktyce jest to jednak zadanie nietrywialne, w którym jednym z głównych problemów jest często tak zwana eksplozja przestrzeni stanów. Oznacza to, że liczba stanów danej sieci może być na tyle wielka lub wręcz nieskończona, że negatywnie wpłynie to na realistyczny czas obliczeń. Jest to szczególnie widoczne w sieciach czasowych, gdzie czas, który upływa pomiędzy jednym a drugim stanem, może być dowolnie małą liczbą wymierną lub rzeczywistą. Jedną z możliwości radzenia sobie z tym problemem jest używanie grafów osiągalności, w których wierzchołki nie są pojedynczymi stanami lecz całymi klasami stanów. Możliwe jest też zapisywanie całym klas stanów równaniami, co znacząco ogranicza liczbę obiektów do analizy [6, 7]

W niniejszym artykule pokazano, że stosowanie parametrycznego opisu stanów dla sieci czasowych może być też z sukcesem zastosowane dla sieci xTPN, aby bez konieczności dogłębnej analizy przestrzeni stanów móc orzekać o osiągalności pewnego stanu docelowego. Struktura pracy jest następująca. Po wprowadzeniu do sieci xTPN, w którym przedstawione zostaną podstawowe definicje opisujące takie sieci i ich podstawowe właściwości, zaprezentowana zostanie koncepcja analizy sekwencji stanów poprzez układy nierówności czasowych. Ich analiza umożliwia odpowiedź na pytanie, czy zadana sekwencja jest wykonalna dla danego stanu początkowego. Zaprezentowany w treści artykułu przykład pokazuje możliwość przeprowadzenia tego typu analizy w pewnych powtarzalnych krokach i fazach. Analizowane są w nich kolejne stany z sekwencji pod kątem ich osiągalności, przy danych w sieci ograniczeniach czasowych. Przykład pokazujący sposób przeprowadzania takiej analizy zaprezentowany został w rozdziale trzecim. Artykuł kończy się podsumowaniem, w którym pokrótce opisane są możliwości dalszych badań nad omawianym zagadnieniem.

## 2. Rozszerzona czasowa sieć Petriego

W tej części zaprezentowana jest koncepcja rozszerzonej czasowej sieci Petriego, która łączy w sobie trzy oddzielnie występujące w literaturze sieci czasowe: TPN,

DPN oraz sieci z tak zwanym oknem czasowym [9]. Formalnie, sieć xTPN bez stanu określona jest Definicją 1.

**Definicja 1.** *Rozszerzona czasowa sieć Petriego bez stanu* [9]

Rozszerzona czasowa sieć Petriego bez stanu jest zbiorem  $\mathcal{Z} = \{P, T, F, V, I, J\}$ , gdzie:

$P$  oraz  $T$  to skończone, niepuste i rozłączne zbiory, odpowiednio miejsc i tranzycji,  $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$  jest zbiorem łuków,

$V : F \rightarrow \mathbb{N}$  jest funkcją przypisującą wagi łukom sieci,

$I : T \rightarrow \mathbb{Q}_0^+ \times \{\mathbb{Q}_0^+ \cup \{\infty\}\} \times \mathbb{Q}_0^+ \times \{\mathbb{Q}_0^+ \cup \{\infty\}\}$  oraz dla każdego  $t_i \in T$ , gdy  $I(t_i) = (I_1(t_i), I_2(t_i), I_3(t_i), I_4(t_i))$  spełnione są nierówności  $I_1(t_i) \leq I_2(t_i)$  i  $I_3(t_i) \leq I_4(t_i)$ ,

$J : P \rightarrow \mathbb{Q}_0^+ \times \{\mathbb{Q}^+ \cup \{\infty\}\}$  oraz dla każdego  $p_j \in P$ , gdy  $J(p_j) = (J_1(p_j), J_2(p_j))$  spełniona jest nierówność  $J_1(p_j) < J_2(p_j)$ .

Podzbiór elementów  $N = \{P, T, F, V\}$  jest klasyczną siecią Petriego bez stanu. Funkcja  $I$  określa dla tranzycji  $t_i$  dwa przedziały czasu. Pierwszy z nich, dany jako  $[I_1(t_i), I_2(t_i)]$ , to zakres minimalnego oraz maksymalnego czasu, w którym tranzycja może pozostawać aktywna, jeżeli pozwalają jej na to tokeny w miejscach wejściowych bezpośrednio ją poprzedzających. Zakresy tego przedziału to bezpośrednie odpowiedniki tak zwanych *earliest firing time* oraz *latest firing time* znanych w sieciach czasowych typu TPN. Dalej będą one konsekwentnie zapisywane jako  $I_1(t_i) = \alpha_{t_i}^L$ ,  $I_2(t_i) = \alpha_{t_i}^U$ , gdzie zawsze  $\alpha_{t_i}^L \leq \alpha_{t_i}^U$ . Drugi przedział  $[I_3(t_i), I_4(t_i)]$  określa minimalny i maksymalny czas produkcji tokenów (po przejściu tranzycji ze stanu aktywacji do stanu produkcji co będzie dokładniej opisane dalej). Zakresy przedziału oznaczane będą jako  $I_3(t_i) = \beta_{t_i}^L$ ,  $I_4(t_i) = \beta_{t_i}^U$  gdzie  $\beta_{t_i}^L \leq \beta_{t_i}^U$ .

Uruchomienie tranzycji następuje po upływie pewnego czasu  $\tau_a(t_i)$  takiego, że  $0 \leq \alpha_{t_i}^L \leq \tau_a(t_i) \leq \alpha_{t_i}^U$ . Po upływie czasu  $\tau_a(t_i)$  tranzycja pobiera tokeny z miejsc bezpośrednio ją poprzedzających, jednak wyprodukowanie nowych tokenów następuje dopiero po upływie pewnego czasu  $\tau_\beta(t_i)$ , liczonego od momentu rozpoczęcia produkcji, takiego, że  $0 \leq \beta_{t_i}^L \leq \tau_\beta(t_i) \leq \beta_{t_i}^U$ .

Funkcja  $J$  przypisuje do każdego miejsca  $p$  przedział czasu  $[J_1(p_j), J_2(p_j)]$ . Dalej stosowana będzie notacja w której  $J_1(p_j) = \gamma_{p_j}^L$  oraz  $J_2(p_j) = \gamma_{p_j}^U$ . Wartość  $\gamma_{p_j}^L$  określa czas, który musi upłynąć dla danego tokenu, aby uzyskać zdolność aktywacji tranzycji lub mógł być użyty, gdy pewna tranzycja rozpoczyna produkcję. Całkowity dopuszczalny czas życia tokenu w danym miejscu trwa od zera do  $\gamma_p^U$  jednostek czasu. W momencie gdy upływ czasu dla tokenu liczony od chwili jego utworzenia spowoduje przekroczenie wartości  $\gamma_p^U$ , a token do tego momentu nie został użyty do produkcji, jest on usuwany z miejsca  $p$ .

## 2.1. Stan sieci i jego stany bazowe

Pełny stan sieci  $\mathcal{Z}$  zapisujemy jako  $z = (m, h)$ , gdzie  $m$  oraz  $h$  to funkcje opisujące dwa stany bazowe  $\mathcal{Z}$  dla miejsc i tranzycji, odpowiednio  $p$ -stan i  $t$ -stan. Funkcja  $m$ , określająca  $p$ -stan w sieci, odpowiada za przypisanie tokenów do każdego jej miejsca. Stan każdego miejsca określa pewien multizbiór  $K$ , którego elementy są liczbami  $\kappa_{p_j}^x$  takimi, że  $0 \leq \kappa_{p_j}^x \leq \gamma_{p_j}^U$ , gdzie  $x$  to indeks konkretnego tokenu. Każda z tych liczb należących do  $K$  określa więc aktualny czas życia tokenu, od momentu jego powstania w danym miejscu. Multizbiór tego typu opisuje Definicja 2.

**Definicja 2.** Multizbiór  $K$  [9]

Niech  ${}^a_b K$ , gdzie  $a > 0$  oraz  $0 \leq b \leq a$ , będzie multizbiorem nieujemnych liczb wymiernych lub niech zawiera on tylko symbol  $\#$ . Elementy takiego multizbioru to wartości z przedziału  $[b, a]$ , co zapisujemy jako:  $\kappa_x \in {}^a_b K$ , jeżeli  $\kappa_x \in \mathbb{Q}_0^+ \wedge 0 \leq b \leq \kappa_x \leq a$ .

Należy zwrócić uwagę, że jest to ogólna definicja multizbioru  $K$ . Każdy konkretny multizbiór  $K$ , na przykład opisujący w danej chwili miejsce  $p_j$ , określony jest jako  $\gamma_p^U K_{p_j}$ . W kolejnym akapicie zostanie opisany inny multizbiór  $K_{p_j}$ , dla którego wartość  $b = \gamma_{p_j}^L$  określać będzie minimalny czas po upływie którego token może aktywować tranzycję. Nowe wyprodukowane tokeny w miejscu  $p_j$  mają zawsze początkowy czas życia równy 0. Czas ten, w miarę zmiany stanu  $z$  sieci spowodowanego upływem czasu, nie może przekroczyć wartości  $\gamma_p^U$ . Kolejnym specyficznym typem multizbioru jest  $M$ . Jest to multizbiór posiadający przede wszystkim dwie cechy. Po pierwsze, jego elementy to multizbiory  $K$ , po drugie, jego liczebność jest zawsze równa  $|P|$ . Można więc formalnie określić, że funkcja  $m$  opisująca  $p$ -stan sieci, przypisuje każdemu miejscu  $p$  odpowiedni multizbiór  ${}^a_b K \in M$ , to jest  $m : P \rightarrow M$ , czyli  $m(p) = {}^a_b K_p$ , gdzie  $a = \gamma_p^U$  oraz  $b = 0$ .

Ważnym typem multizbioru  $K$  jest tak zwany aktywujący podzbiór tokenów. Istnieć on musi dla każdego miejsca  $p$  bezpośrednio poprzedzającego tranzycję  $t$  i spełniać dwa warunki. Po pierwsze, musi zawierać przynajmniej tyle tokenów ile wynosi waga łuku  $z(p, t)$ . Po drugie, każdy z jego tokenów musi mieć czas życia równy lub większy wartości  $\gamma_p^L$ . Aktywujący podzbiór tokenów  $w$  pewnym konkretnym miejscu  $p$  dla tranzycji  $t$  oznaczany będzie jako  ${}^a_b K_{p-t}^{akt}$ , gdzie  $a = \gamma_p^U$  i  $b = \gamma_p^L$ .

Drugi ze stanów bazowych, tak zwany  $t$ -stan, jest opisany parą wartości  $(u_{t_i}, w_{t_i})$ , które muszą mieścić się w zakresach opisanych funkcją  $I$ . Dalej będą one zwane odpowiednio licznikiem stanu aktywacji ( $u_{t_i}$ ) oraz stanu produkcji ( $w_{t_i}$ ).  $t$ -stan określa funkcja  $h$  taka, że  $h(t_i) = (u_{t_i}, w_{t_i})$ . Dozwolone wartości dla  $u$  oraz  $w$  to zbiór liczb rzeczywistych lub symbol  $\#$ . Licznik  $u_{t_i}$  mierzy czas jaki upłynął od momentu aktywacji tranzycji  $t_i$ , natomiast licznik  $w_{t_i}$  mierzy czas, jaki upłynął od momentu, kiedy tranzycja  $t_i$  rozpoczęła fazę produkcji tokenów. Należy zwrócić uwagę, że wartość należąca do zbioru  $\mathbb{R}$  może mieć w danym stanie tranzycji  $t_i$  tylko jeden z liczników, drugi z nich musi w tym momencie mieć przypisany symbol specjalny  $\#$ . Dwa liczniki równocześnie mogą mieć również przypisane symbole  $\#$ , nie jest jednak możliwe aby równocześnie liczniki miały rzeczywiste wartości liczbowe. Trzy dopuszczalne przypadki są więc następujące:

1.  $h(t) = (u_t = \#, w_t = \#)$  określa że tranzycja  $t$  nie jest aktywna i nie produkuje tokenów, opisywana jest wtedy ona jako  $t^\#$ .
2.  $h(t) = (u_t \in \mathbb{R}_0^+, w_t = \#)$  -  $t$  jest aktywna, co opisywane jest jako  $t^{akt}$ .
3.  $h(t) = (u_t = \#, w_t \in \mathbb{R}_0^+)$  -  $t$  jest w fazie produkcji, co opisywane jest jako  $t^{prod}$ .

**2.2. Sekwencja stanów sieci**

Stan sieci xTPN zmienia się wraz z upływem czasu oraz zmianą liczby tokenów w miejscach. Można jednak wyróżnić pewne istotne momenty, związane ze zmianą jednego z trzech stanów  $h$  tranzycji ( $t^\#, t^{akt}$  i  $t^{prod}$ ) lub ze zmianą liczby tokenów w miejscu na skutek przekroczenia maksymalnego czasu życia tokenu. Wymienione cztery momenty czasu będą odpowiadać za powstanie tzw. *stanów istotnych*. Są to takie stany,

które odzwierciedlają dokonaną właśnie zmianę z czterech wymienionych. Pomiedzy stanami istotnymi istnieć może w zasadzie nieskończona liczba pośrednich stanów nieistotnych, w których liczniki dla tranzycji i czasów życia tokenów są powiększone o pewną niewielką, policzalną wartość (upływający czas) od ostatniego stanu istotnego, jednak nie powoduje to zmiany ani stanu tranzycji, ani liczby tokenów w sieci.

Upływ czasu pomiędzy nimi może być opisany pewnym układem nierówności. Układy te pozwalają określić, czy możliwe jest przejście od jednego stanu  $z$  sieci do drugiego. Przejście to opisujemy za pomocą pewnej sekwencji stanów istotnych. Definicja 3 wprowadza pojęcie sekwencji stanów istotnych dla sieci  $xTPN$ . Dalej będzie ona jednak po prostu nazywana sekwencją stanów.

**Definicja 3.** Sekwencja stanów.

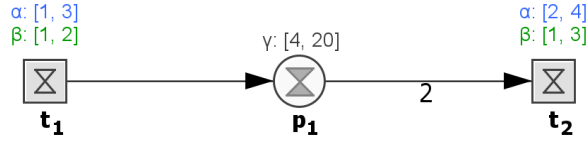
Sekwencja stanów dana jest jako  $\sigma = \tau^{z_0}, \chi_1^{st}, \tau^{z_1}, \chi_2^{st}, \tau^{z_2}, \dots, \chi_n^{st}, \tau^{z_{n+1}}$ , gdzie  $\chi$  oznacza element sieci  $\mathcal{Z}$ : tranzycję  $t$  lub miejsce  $p$ , natomiast  $st$  konkretyzuje dany stan istotny. Są to: nieaktywność ( $t^\#$ ), faza aktywacji ( $t^{akt}$ ), faza produkcji ( $t^{prod}$ ) lub przekroczenie czasu życia przez tokeny w miejscu oznaczane przez  $p^{exp}$ .  $\tau^{z_x}$  to czas, który musi upłynąć pomiędzy stanami opisywanymi przez  $\chi_i^{st}$ .

Należy tutaj dokonać pewnego ważnego rozróżnienia. Formalnie stan sieci oznaczany jest jako  $z = (m^z, h^z)$ . Elementy sekwencji inne niż czasy  $\tau^{z_x}$  należy traktować jako opisy stanów istotnych, np.  $t_i^{prod}$  opisuje stan, w którym *właśnie rozpoczęła się produkcja tokenów przez tranzycję  $t_i$* . Oznacza to też, że licznik produkcji dla  $t_i$  jest równy zero. Mając w ten sposób zdefiniowaną sekwencję stanów, można rozważać, czy jest ona możliwa do pełnego wykonania uwzględniając inne ograniczenia czasowe w sieci. Przejście pomiędzy wszystkimi stanami istotnymi z sekwencji  $\sigma$  od stanu początkowego  $z$  do końcowego stanu  $z'$  zapisywane będzie jako  $z \xrightarrow{\sigma} z'$ . Sprawdzenie, czy  $\sigma$  może doprowadzić do stanu sieci  $z'$  od  $z$  jest możliwe bez kompleksowej analizy przestrzeni stanów. Sposób analizy wykonalności sekwencji pokazany zostanie na przykładzie w kolejnym rozdziale. Należy ponownie podkreślić, że stany istotne zawarte w sekwencji  $\sigma$  reprezentują pewną istotną zmianę w sieci  $xTPN$  związaną z tranzycją lub miejscem, która następuje po czasie  $\tau$  poprzedzającym wymieniony stan istotny w  $\sigma$ . W dalszym przykładzie w sekwencji znajdują się zmiany stanu tranzycji z aktywności na produkcję i odwrotnie. Na bardzo prostym przykładzie można opisać to w taki sposób, że dla pewnej krótkiej sekwencji danej np. jako  $\sigma = 5, t_1^{akt}$ , będąc w stanie  $z$  należy zbadać (analizując zależności czasowe w sieci), czy możliwe jest po dokładnie 5 jednostkach czasu przejście do stanu, w którym tranzycja  $t_1$  staje się aktywna. Analiza taka wymaga zbudowania układu nierówności, co zostanie pokazane na przykładzie w kolejnym rozdziale.

### 3. Analiza wykonalności sekwencji stanów

Metoda weryfikacji wykonalności sekwencji  $\sigma$  zostanie teraz dokładnie pokazana na przykładzie prostego układu dwóch tranzycji, pokazanego na Rysunku 1. Stan tej sieci to  $z_0 = (m^{z_0}, h^{z_0})$  gdzie  $h^{z_0}(t_1) = (0, \#)$ ,  $h^{z_0}(t_2) = (\#, \#)$ ,  $m^{z_0}(p_1) = K_{p_1} = \emptyset$ .

Stosowane oznaczenia są następujące: niech  $\tau_G$  oznacza obliczony czas sieci który upłynął od początkowego stanu  $z_0$ , niech  $\tau^{z_x}$  oznacza czas, który upłynął od stanu  $z_x$ , na początku  $\tau_G = \tau^{z_0} = 0$ . Litera G w dolnym indeksie oznacza globalny czas liczony dla sieci od momentu rozpoczęcia analizy sekwencji  $\sigma$  dla stanu początkowego  $z_0$ . Multizbiór dla miejsca  $p_1$  oznaczany będzie jako  ${}^{20}_0K_{p_1}$ , ponieważ  $\gamma_{p_1}^U = 20$ .



Rys. 1. Przykładowa sieć w stanie  $z_0 = (m^{z_0}, h^{z_0})$ . Prezentacja wartości  $\alpha$ ,  $\beta$  oraz  $\gamma$  sieci w formie zakresów, według konwencji stosowanej w programie Holmes [8].

**Przykład.** Niech dana będzie sekwencja czasów oraz stanów istotnych  $\sigma = \tau^{z_0} = 2.5, t_1^{prod}, \tau^{z_1} = 1.5, t_1^{akt}, \tau^{z_2} = 1.5, t_1^{prod}, \tau^{z_3} = 2, t_1^{akt}, \tau^{z_4} = 3, t_1^{prod}, \tau^{z_5} = 1, t_2^{akt}, \tau^{z_6} = 1.5$ .

Sprawdzenie wykonalności sekwencji wymaga utworzenia układu nierówności uwzględniających zależności czasowe i sprawdzenia jego niesprzeczności. Analiza ta wykonywana jest sekwencyjnie w kolejnych krokach, dla każdej kolejnej pary  $(\tau, \chi_i^{st})$  z sekwencji  $\sigma$ , gdzie  $\tau$  oznacza dokładny czas, który ma upłynąć aż do osiągnięcia stanu istotnego opisanego przez  $\chi_i^{st}$ . W każdym kroku rozróżnia się dwie fazy. W pierwszej ustalany jest dokładny stan sieci. Tworzony on jest poprzez aktualizację liczników czasu dla stanu poprzedniego o wartość  $\tau^{z_{prev}}$ , czyli taką, której poprawność potwierdziła analiza w fazie drugiej w *poprzednim* kroku. Prowadzi to do ustalenia opisu stanu następnego, który jest podstawą analizy układu nierówności w fazie drugiej w aktualnym kroku. W drugiej fazie budowany jest układ nierówności, którego celem jest sprawdzenie, czy  $\tau$  może doprowadzić do stanu istotnego opisywanego przez  $\chi_i^{st}$ .

W przypadku, kiedy cała procedura jest dopiero rozpoczynana (w kroku pierwszym), w fazie pierwszej przyjmuje się za punkt wyjścia stan początkowy  $z_0$  i na jego podstawie w fazie drugiej analizuje się czas  $\tau$  z pierwszej pary sekwencji  $\sigma$ .

- **Krok 1.** Stan początkowy  $z_0$ , czas  $\tau_G^{z_0} = 0$  (początkowa wartość upływu czasu). Sprawdzenie pierwszej pary w sekwencji  $\sigma$ , tj.  $(\tau^{z_0} = 2.5, t_1^{prod})$ . Innymi słowy, w fazie drugiej należy sprawdzić, czy możliwe jest rozpoczęcie produkcji przez  $t_1$ , po czasie  $\tau^{z_0}$  od stanu określonego w fazie pierwszej danego kroku.

**Faza 1:** W kroku pierwszym przyjmuje się stan początkowy  $z_0$ .

$$h^{z_0}(t_1) = (u_{t_1} = 0, \#), h^{z_0}(t_2) = (\#, \#), m^{z_0}(p_1) = {}^0_0K_{p_1} = \emptyset.$$

Należy tutaj przypomnieć, że funkcja  $h^{z_x}(t)$  w danym stanie  $z_x$  zwraca wartości liczników czasów aktywacji oraz produkcji pewnej tranzycji  $t$ . Funkcja  $m^{z_x}(p)$  w stanie  $z_x$  określa multizbiór  $K_{p_1}$  opisujący tokeny w miejscu  $p$ .

**Faza 2:** Określenie dozwolonego zakresu dla czasu  $\tau^{z_0}$ . Z sekwencji  $\sigma$  wynika, że  $\tau^{z_0} = 2.5$  i jest to czas przed rozpoczęciem produkcji przez  $t_1$  (co określa element  $t_1^{prod}$  w  $\sigma$ ). Stąd układ ma na początku tylko jedną nierówność:

$$\begin{aligned} t_1^{akt}: \alpha_{t_1}^L \leq u_{t_1} + \tau^{z_0} \leq \alpha_{t_1}^U &\Rightarrow 1 \leq \tau^{z_0} \leq 3 \\ t_2^\#: &\text{nieaktywna, } p_1: \text{brak tokenów} \end{aligned}$$

Z nierówności dla  $t_1$  wynika, że po czasie  $\tau^{z_0} = 2.5$  tranzycja  $t_1$  może rozpocząć produkcję tokenów, mieści się on bowiem w zakresie minimalnego i maksymalnego czasu aktywacji dla tranzycji  $t_1$ . Początek sekwencji  $\sigma$  dany jako  $\sigma' = 2.5, t_1^{prod}$  jest więc wykonalny. Nie da się utworzyć nierówności w tym stanie dla tranzycji  $t_2$ , ponieważ jest ona nieaktywna, natomiast miejsce  $p_1$  nie zawiera żadnych tokenów.

- **Krok 2.** Stan  $z_1$ , czas  $\tau_G^{z_1} = \tau_G^{z_0} + \tau^{z_0} = 2.5$ . Czas globalny jest aktualizowany poprzez dodanie do jego ostatniej wartości poprzedniego czasu  $\tau$ , czyli tego, dla którego poprawnie zweryfikowano jego niesprzeczność w układzie nierówności w fazie drugiej poprzedniego kroku. W tym kroku sprawdzana jest druga para z sekwencji  $\sigma$ , czyli  $(\tau^{z_1} = 1.5, t_1^{akt})$

**Faza 1:** Ustalenie aktualnego stanu sieci po upływie (poprzedniego) czasu  $\tau^{z_0} = 2.5$  oraz rozpoczęciu produkcji przez  $t_1$ , co zapisujemy jako  $z_0 \xrightarrow{(\tau^{z_0}=2.5, t_1^{prod})} z_1$ .

$$h^{z_1}(t_1) = (\#, w_{t_1} = 0), h^{z_1}(t_2) = (\#, \#), m^{z_1}(p_1) = {}^0_0K_{p_1} = \emptyset$$

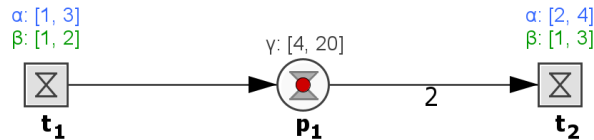
Jest to stan istotny określony przez  $t_1^{prod}$  w pierwszej parze elementów sekwencji  $\sigma$ . Oznacza to, że po czasie  $\tau^{z_0}$  tranzycja  $t_1$  zakończyła aktywację i rozpoczęła produkcję tokenów.

**Faza 2:** Określenie czy czas  $\tau^{z_1} = 1.5$  może doprowadzić do stanu istotnego zainicjowanego zmianą stanu tranzycji opisaną przez  $t_1^{akt}$ .

$$t_1^{prod}: \beta_{t_1}^L \leq w_{t_1} + \tau^{z_1} \leq \beta_{t_1}^U \Rightarrow 1 \leq \tau^{z_1} \leq 2$$

$t_2$ : nieaktywna,  $p_1$ : brak tokenów

Jedyna nierówność jest prawdziwa dla  $\tau^{z_1} = 1.5$ , po nim tranzycja  $t_1$  zakończy produkcję tokenów. Ponieważ zaś sama jest tranzycją wejściową, tj. nie posiada swoich miejsc wejściowych, automatycznie przejdzie ona po tym ponownie do stanu aktywacji. Dokładnie po czasie  $\tau^{z_1}$ , jeden nowy token zostanie utworzony w miejscu  $p_1$ . Zmianę stanu zapisujemy jako  $z_1 \xrightarrow{(\tau^{z_1}=1.5, t_1^{akt})} z_2$ . Stan sieci w osiągniętym stanie istotnym  $z_2$  pokazuje Rysunek 2.



Rys. 2. Sieć w stanie  $z_2$

- **Krok 3.** Stan  $z_2$ , czas  $\tau_G^{z_2} = \tau_G^{z_1} + \tau^{S^2} = 4$ . W tym kroku sprawdzana jest trzecia para z sekwencji  $\sigma$ , czyli  $(\tau^{z_2} = 1.5, t_1^{prod})$ .

**Faza 1:** Ustalenie aktualnego stanu sieci poprzez przejście  $z_1 \xrightarrow{(\tau^{z_1}=1.5, t_1^{akt})} z_2$ .

$$h^{z_2}(t_1) = (u_{t_1} = 0, \#), h^{z_2}(t_2) = (\#, \#), m^{z_2}(p_1) = {}^0_0K_{p_1} = \{0\}$$

**Faza 2:** Określenie dozwolonego zakresu dla czasu  $\tau^{z_2} = 1.5$  w sekwencji  $\sigma$ .

$$t_1^{akt}: \alpha_{t_1}^L \leq u_{t_1} + \tau^{z_2} \leq \alpha_{t_1}^U \Rightarrow 1 \leq \tau^{z_2} \leq 3$$

$t_2^\#$ : nieaktywna

$$\kappa_{p_1}^1 + \tau^{z_2} \leq \gamma_{p_1}^U \Rightarrow 0 + \tau^{z_2} \leq 20 \Rightarrow \tau^{z_2} \leq 20$$

Należy zwrócić uwagę, że od momentu pojawienia się tokenu w miejscu  $p_1$ , czas  $\tau^{z_2}$  jest dodatkowo ograniczany przez maksymalny dopuszczalny czas życia tokenów w  $p_1$ . Układ nierówności wciąż pozostaje prawdziwy, tak więc sekwencja  $\sigma$  jest wykonywalna w swojej początkowej części danej jako  $\sigma' = (\tau^{z_0} = 2.5, t_1^{prod}, \tau^{z_1} = 1.5, t_1^{akt}, \tau^{z_2} = 1.5, t_1^{prod})$ .

- **Krok 4.** Stan  $z_3$ , czas  $\tau_G^{z_3} = \tau_G^{z_2} + \tau^{z_2} = 5.5$ . W tym kroku sprawdzana jest czwarta para z sekwencji  $\sigma$ , czyli  $(\tau^{z_3} = 2, t_1^{akt})$ .

**Faza 1:** Ustalenie aktualnego stanu sieci poprzez przejście  $z_2 \xrightarrow{(\tau^{z_2}=1.5, t_1^{prod})} z_3$ .

$$h^{z_3}(t_1) = (\#, w_{t_1} = 0), h^{z_3}(t_2) = (\#, \#), m^{z_3}(p_1) = {}^{20}_0K_{p_1} = \{1.5\}$$

**Faza 2:** Określenie dozwolonego zakresu dla czasu  $\tau^{z_3} = 2$  z sekwencji  $\sigma$ .

$$\begin{aligned} t_1^{prod}: \beta_{t_1}^L &\leq w_{t_1} + \tau^{z_3} \leq \beta_{t_1}^U \Rightarrow 1 \leq \tau^{z_3} \leq 2 \\ t_2^\#: &\text{nieaktywna} \\ \kappa_{p_1}^1 + \tau^{z_3} &\leq \gamma_{p_1}^U \Rightarrow 1.5 + \tau^{z_3} \leq 20 \Rightarrow \tau^{z_3} \leq 18.5 \end{aligned}$$

Układ nierówności dla  $\tau^{z_3} = 2$  pozostaje prawdziwy.

- **Krok 5.** Stan  $z_4$ , czas  $\tau_G^{z_4} = \tau_G^{z_3} + \tau^{z_3} = 7.5$ . W tym kroku sprawdzana jest piąta para z sekwencji  $\sigma$ , czyli  $(\tau^{z_4} = 3, t_1^{prod})$ .

**Faza 1:** Ustalenie aktualnego stanu sieci poprzez przejście  $z_3 \xrightarrow{(\tau^{z_3}=2, t_1^{akt})} z_4$ .

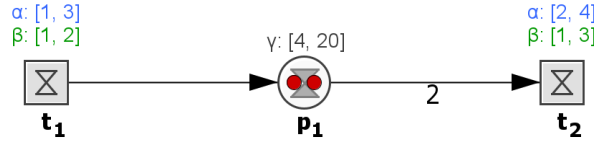
$$h^{z_4}(t_1) = (u_{t_1} = 0, \#), h^{z_4}(t_2) = (\#, \#), m^{z_4}(p_1) = {}^{20}_0K_{p_1} = \{3.5, 0\}$$

**Faza 2:** Określenie dozwolonego zakresu dla czasu  $\tau^{z_4} = 3$  z sekwencji  $\sigma$ .

$$\begin{aligned} t_1^{akt}: \alpha_{t_1}^L &\leq u_{t_1} + \tau^{z_4} \leq \alpha_{t_1}^U \Rightarrow 1 \leq \tau^{z_4} \leq 3 \\ t_2^\#: &\text{nieaktywna} \\ \kappa_{p_1}^1 + \tau^{z_4} &\leq \gamma_{p_1}^U \Rightarrow 3.5 + \tau^{z_4} \leq 20 \Rightarrow \tau^{z_4} \leq 16.5 \\ \kappa_{p_1}^2 + \tau^{z_4} &\leq \gamma_{p_1}^U \Rightarrow \tau^{z_4} \leq 20 \\ {}^{20}_4K_{p_1-t_2}^{akt}: &\tau^{z_4} \leq 4 \end{aligned}$$

Układ nierówności dla  $z_4$  pozostaje prawidłowy dla  $\tau^{z_4} = 3$ . Należy jednak zwrócić uwagę na ostatnią nierówność. Określa ona ograniczenie czasowe na  $\tau^{z_4}$  wynikające z obliczenia minimalnego czasu potrzebnego do powstanie podzbioru aktywującego tranzycję  $t_1$  w miejscu  $p_1$ , który to podzbiór oznaczamy jako  ${}^{20}_4K_{p_1-t_2}^{akt}$ . W stanie  $z_4$  multizbiór  ${}^{20}_0K_{p_1}$  zawiera dwa tokeny i wtedy nie istnieje jeszcze w stanie  $z_4$  podzbiór aktywujący  ${}^{20}_4K_{p_1-t_2}^{akt}$  dla  $t_2$ . Zacznie on jednak istnieć po 4 jednostkach czasu. Wtedy aktualnie najmłodszy (w stanie  $z_4$ ) z dwóch tokenów osiągnie czas życia równy  $\gamma_{p_1}^L = 4$ , drugi z tokenów będzie miał czas życia równy 7.5. Należy zwrócić uwagę, że określenie minimalnego czasu po upływie którego powstać może podzbiór aktywujący (gdziekolwiek) w danej sieci, jest innym ciekawym problemem algorytmicznym. Opracowany algorytm wyznaczania tego czasu zostanie jednak pominięty. Stan po upływie czasu  $\tau^{z_4} = 3$  i rozpoczęciu produkcji przez  $t_1$  dany jest na Rysunku 3.



Rys. 3. Sieć w stanie  $z_5$ 

- **Krok 6.** Stan  $z_5$ ,  $\tau_G^{z_5} = \tau_G^{z_4} + \tau^{z_4} = 10.5$ . W tym kroku sprawdzana jest szósta para z sekwencji  $\sigma$ , czyli  $(\tau^{z_5} = 1, t_2^{akt})$ .

**Faza 1:** Ustalenie aktualnego stanu sieci poprzez przejście  $z_4 \xrightarrow{(\tau^{z_4}=3, t_1^{prod})} z_5$ .

$$h^{z_5}(t_1) = (\#, w_{t_1} = 0), h^{z_5}(t_2) = (\#, \#), m^{z_5}(p_1) = {}^{20}_0K_{p_1} = \{6.5, 3\}$$

**Faza 2:** Określenie dozwolonego zakresu dla czasu  $\tau^{z_5} = 1$  z sekwencji  $\sigma$ .

$$\begin{aligned} t_1^{prod}: \beta_{t_1}^L &\leq w_{t_1} + \tau^{z_5} \leq \beta_{t_1}^U \Rightarrow 1 \leq \tau^{z_5} \leq 2 \\ t_2^\#: &\text{nieaktywna} \\ \kappa_{p_1}^1 + \tau^{z_5} &\leq \gamma_{p_1}^U \Rightarrow 6.5 + \tau^{z_5} \leq 20 \Rightarrow \tau^{z_5} \leq 13.5 \\ \kappa_{p_1}^2 + \tau^{z_5} &\leq \gamma_{p_1}^U \Rightarrow 3.5 + \tau^{z_5} \leq 20 \Rightarrow \tau^{z_5} \leq 16.5 \\ {}^{20}_4K_{p_1-t_2}: &\tau^{z_5} \leq 1 \end{aligned}$$

Układ nierówności dla  $\tau^{z_5} = 1$  pozostaje spełniony.

- **Krok 7.** Stan  $z_6$ ,  $\tau_G^{z_6} = \tau_G^{z_5} + \tau^{z_5} = 11.5$ . W tym kroku sprawdzany jest ostatni element (brak pary, koniec sekwencji  $\sigma$ ) czyli czas  $\tau^{z_6} = 1.5$ .

**Faza 1:** Ustalenie aktualnego stanu sieci poprzez przejście  $z_5 \xrightarrow{(\tau^{z_5}=1, t_2^{akt})} z_6$ .

$$h^{z_6}(t_1) = (\#, w_{t_1} = 0.5), h^{z_6}(t_2) = (u_{t_2} = 0, \#), m^{z_6}(p_1) = K_{p_1} = \{7.5, 4\}$$

**Faza 2:** Określenie dozwolonego zakresu dla czasu  $\tau^{z_6}$ .

$$\begin{aligned} t_1^{prod}: \beta_{t_1}^L &\leq w_{t_1} + \tau^{z_6} \leq \beta_{t_1}^U \Rightarrow 1 \leq 0.5 + \tau^{z_6} \leq 2 \Rightarrow 0.5 \leq \tau^{z_6} \leq 1.5 \\ t_2^{akt}: \alpha_{t_2}^L &\leq u_{t_2} + \tau^{z_6} \leq \alpha_{t_2}^U \Rightarrow 2 \leq \tau^{z_6} \leq 4 \\ \kappa_{p_1}^1 + \tau^{z_6} &\leq \gamma_{p_1}^U \Rightarrow 7.5 + \tau^{z_6} \leq 20 \Rightarrow \tau^{z_6} \leq 12.5 \\ \kappa_{p_1}^2 + \tau^{z_6} &\leq \gamma_{p_1}^U \Rightarrow 4 + \tau^{z_6} \leq 20 \Rightarrow \tau^{z_6} \leq 16 \end{aligned}$$

Należy zwrócić szczególną uwagę na dwie początkowe nierówności dla tranzycji  $t_1$  oraz  $t_2$ . Można by w tym miejscu uznać, że doszliśmy do sprzeczności, ponieważ górne ograniczenie dla nierówności określonej dla  $t_1$  w stanie produkcji jest mniejsze ( $\beta_{t_1}^U = 1.5$ ) niż dolne ograniczenie dla  $t_2$  ( $\alpha_{t_2}^L = 2$ ). Sprzeczność ta jest jednak pozorna i wynika z tego, że w  $\sigma$  nie ma zdefiniowanego następnego stanu istotnego do osiągnięcia w ramach tej sekwencji.

Gdyby, teoretycznie,  $\sigma$  kończyła się stanem  $t_2^{prod}$ , byłaby ona wtedy nieosiągalna po czasie  $\tau^{z_6} = 1.5$ . Czas taki byłby zbyt krótki o 0.5 jednostki, aby tranzycja  $t_2$  mogła zakończyć aktywację w najkrótszym dozwolonym czasie. Ponieważ jednak na  $\tau^{z_6} = 1.5$  sekwencja  $\sigma$  się kończy, oznacza to, że jest możliwa do wykonania. Doprowadza ona finalnie od stanu początkowego  $z$  do stanu  $z'$  co zapisujemy jako  $z \xrightarrow{\sigma} z'$ . Stan ten można dokładnie opisać poprzez:

$$h^{z'}(t_1) = (\#, w_{t_1} = 2), h^{z'}(t_2) = (u_{t_2} = 1.5, \#), m^{z'}(p_1) = {}^{20}_0K_{p_1} = \{9, 4.5\}$$

Jest to całkowicie osiągalny stan sieci po pełnym wykonaniu sekwencji  $\sigma$ , z którego opisu można wywnioskować, że kolejnym stanem istotnym przez niego opisywanym jest rozpoczęcie produkcji przez tranzycję  $t_1$ , ponieważ jej licznik czasu produkcji ( $w_{t_1}$ ) po zwiększeniu go o  $\tau^{z_6}$  osiągnął dopuszczalne maksimum (ponieważ  $\beta_{t_1}^U = 2$ ). Jako podsumowanie pokazujące, że zagadnienie to jest ciekawsze i bardziej skomplikowane niż zaprezentowany tutaj przykład, można powiedzieć, że stan ten transformuje się w zerowym czasie do *stanu równoważnego*  $z''$ , który z kolei można opisać jako:

$$h^{z''}(t_1) = (0, w_{t_1} = \#), h^{z''}(t_2) = (u_{t_2} = 1.5, \#), m^{z''}(p_1) = {}^{20}_0K_{p_1} = \{9, 4.5, 0\}$$

Stan równoważny do pewnego stanu nie oznacza jednak, co oczywiste, identyczności obu stanów. Jest to wyraźnie widoczne chociażby w fakcie, że w stanie  $z'$  nie ma jeszcze nowego tokenu w  $p_1$  a tranzycja  $t_1$  pozostaje w stanie produkcji. Można tym niemniej formalnie zapisać, że  $z' \xrightarrow{\tau=0} z''$ .

Widać więc, że czas do faktycznego wyprodukowania tokenów w miejscu  $p_1$  w stanie  $z'$  jest tak naprawdę równy zero. W momencie, w którym licznik czasu produkcji pewnej tranzycji osiąga swoje dopuszczalne maksimum, tranzycja ta *musi* wyprodukować nowe tokeny i zmienić swój stan na aktywny lub nie, zależnie od struktury sieci. To oraz inne zagadnienia, jak chociażby algorytmiczny opis zastosowanych kroków dla dowolnej sieci xTPN, wykraczają jednak poza zakres niniejszej pracy.

#### 4. Podsumowanie

Podsumowując, rozszerzona czasowa sieć Petriego to zaawansowane narzędzie do modelowania systemów biologicznych i przemysłowych, umożliwiające precyzyjne określenie dynamiki tych systemów. Dzięki integracji właściwości różnych typów sieci czasowych, takich jak TPN, DPN, sieć xTPN oferuje elastyczność w modelowaniu zarówno zakresów czasowych aktywacji, jak i produkcji tokenów oraz ich efektywnego czasu życia w miejscach.

W artykule przedstawiony został sposób analizy osiągalności pewnego zadanego stanu  $z'$  od stanu początkowego  $z$ , przy zadanej sekwencji stanów istotnych  $\sigma$ . Analiza ta bazuje na badaniu przejść pomiędzy stanami istotnymi z pewnej sekwencji  $\sigma$  za pomocą układów nierówności uwzględniających zależności czasowe elementów sieci. Dopóki elementy tego układu są niesprzeczne, możliwe jest osiągnięcie kolejnego stanu danego sekwencją  $\sigma$  po pewnym określonym czasie  $\tau$ , który również jest w tejże sprawdzanej sekwencji ściśle określony.

Takie podejście pozwala omijać różne problemy związane z analizą przestrzeni stanów, jak chociażby problem ich tak zwanej eksplozji, w której to graf stanów rozrasta się w sposób szybko uniemożliwiający realistyczną analizę. Z uwagi na ograniczenia miejsca oraz złożoność opisywanego zagadnienia ograniczono się do przykładu prezentującego wykonalność opisywanego podejścia. Autorzy planują dalsze prace nad tekstem opisującym pełne, bardziej zaawansowane przypadki sekwencji stanów dla sieci xTPN oraz formalny matematyczny opis stosowanej procedury analizy sekwencji. Należy też podkreślić, że algorytm wspomniany pod koniec kroku piątego w przykładzie z trzeciego rozdziału, służący do określania w danym stanie sieci minimalnego czasu do

pojawienia się podzbioru aktywującego, jest również nietrywialny. W założeniu musi on uwzględniać wszystkie możliwe układy miejsc i tranzycji w sieci xTPN, jak również niestandardowe łuki, takie jak łuki odczyty czy łuki hamujące. Jego dokładny opis wykracza jednak poza ramy niniejszej pracy.

## LITERATURA

1. Berthomieu B., Diaz M.: Modeling and Verification of Time Dependent Systems Using Time Petri Nets, IEEE Trans, on Software Eng., 1991, vol. 17(3), p. 259-273.
2. Formanowicz D., Radom M., Rybarczyk A., Formanowicz P.: The role of Fenton reaction in ROS-induced toxicity underlying atherosclerosis - modeled and analyzed using a Petri net-based approach, Biosystems, 2018, vol. 165, p. 71-87.
3. Heiner M., Lehrack S., Gilbert D., Marwan W.: Extended Stochastic Petri Nets for Model-Based Design of Wetlab Experiments, Lecture Notes in Computer Science, 2009, vol. 5750, p. 138-163.
4. Merlin P.M.: A Study of the Recoverability of Computing Systems, Ph.D. Thesis in University of California, Irvine, 1974.
5. Olszak J., Radom M., Formanowicz P.: Some aspects of modeling and analysis of complex biological systems using time Petri nets, Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences, 2018, vol. 66(1), p. 67-78.
6. Popova-Zeugmann, L.: Time Petri nets state space reduction using dynamic programming, Control and Cybernetics, 2006, vol. 35(3), p. 721-748.
7. Popova-Zeugmann L.: Time and Petri Nets, Springer, Berlin, 2013.
8. Radom M., Rybarczyk A., Szawulak B., et al.: Holmes: a graphical tool for development, simulation and analysis of Petri net based models of complex biological systems, Bioinformatics, 2017, <https://doi.org/10.1093/bioinformatics/btx492>
9. Radom M., Formanowicz P.: Algorithmic aspects of extended time Petri nets, w: Andrzej Świerniak, Jolanta Krystek, Automatykacja Procesów Dyskretnych, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice, 2022, tom. 2, p. 91-102.
10. Radom M., Formanowicz P.: Extended time Petri nets, 2024, *submitted for publication*.
11. Radom M., Formanowicz P.: Algorithms for places and transitions time analysis in extended time Petri nets, 2024, *submitted for publication*.
12. Ramchandani C.: Analysis of asynchronous concurrent systems by timed Petri nets. PhD Thesis., Massachusetts Institute of Technology, 1974.