

Marek MAGIERA  
Akademia Górniczo-Hutnicza

## HIERARCHICZNA METODA PLANOWANIA PRZEPIYWÓW WIELOWARIANTOWYCH PRODUKTÓW PRZEZ LINIE PRODUKCYJNE

**Streszczenie.** W hierarchicznej metodzie planowania przepływów wielowariantowych produktów przez linie produkcyjne z maszynami równoległymi uwzględniono planowane oraz losowe przestoje maszyn. Dopuszczono alternatywne marszruty przepływów produktów. Równoważenie średnich obciążeń maszyn należących do poszczególnych stadiów i minimalizacja przepływów międzystadialnych (poziom I metody) poprzedzają szeregowanie operacji (poziom II metody). Zbudowano modele matematyczne zadań programowania całkowitoliczbowego. Zamieszczono wyniki eksperymentów obliczeniowych dotyczących metody.

## A HIERARCHICAL METHOD OF PLANNING OF MULTI-OPTION PRODUCT FLOWS THROUGH PRODUCTION LINES

**Summary.** The planned and random downtime of machines are regarded in the hierarchical method of planning product flows shop through production lines with parallel machines. The method is constructed for multi-option products. The alternative routes of product flows are permitted. The first level of the method is connected with balancing machine workloads and minimization of flows between stages. The task scheduling is accomplished on the second level. The mathematical models of integer programming tasks were built for its specific levels. The results of computational experiments with the proposed method are presented.

### 1. Wprowadzenie

*Planowanie* to proces ustalania celów i sposobów ich osiągnięcia, a także precyzowania zadań oraz terminów ich wykonywania. Proces ten można również określić jako etap podejmowania decyzji dotyczących celów, środków i metod działania [9]. W przypadku *planowania przepływów* produktów przez linie produkcyjne proces ten dotyczy przemieszczania się produktów pomiędzy maszynami produkcyjnymi, wyznaczania obciążeń tych maszyn. Planowanie może dotyczyć różnych poziomów: strategicznego (długookresowego), taktycznego (średnio- i krótkookresowego), a także wyróżnia się planowanie i sterowanie operacyjne (krótkookresowe i bieżące) [9].

Zaproponowana w artykule metoda planowania przepływów produktów dotyczy poziomu taktycznego oraz operacyjnego. Optymalizacja obciążeń maszyn, która stanowi jedno z rozwiązywanych zadań, przypisywana jest poziomowi taktycznemu. Wy-

znaczenie jak najmniejszej liczby przepływów produktów pomiędzy maszynami to kolejne zdanie, do którego rozwiązania służy m.in. proponowana metoda. Należy zwrócić uwagę, że wymienione zadania przeważnie są ze sobą w konflikcie, gdyż zmniejszenie liczby przemieszczeń produktów pomiędzy maszynami może skutkować zwiększeniem obciążeń poszczególnych maszyn. Do rozwiązywanych zadań, dotyczących poziomu operacyjnego, należy szeregowanie operacji, czyli ich rozdział w czasie i w przestrzeni (przydział do maszyn), w wyniku czego budowany jest harmonogram przepływów produktów, określający terminy wykonywania operacji. Budowa tych harmonogramów to główny cel metody opisanej w następnych rozdziałach. Metoda służy do wyznaczania najkrótszych harmonogramów przy jak najlepszym wykorzystaniu dostępnych zasobów (maszyn produkcyjnych, urządzeń pomocniczych). W budowie harmonogramów wzięto pod uwagę planowane oraz losowe przestoje maszyn.

Sposób osiągnięcia określonego powyżej celu planowania przepływów produktów wiąże się z zastosowaniem programowania całkowitoliczbowego (PC). Poszczególnym poziomom opracowanej metody przypisane zostały liniowe modele matematyczne. Problematyka związana ze stosowaniem PC w planowaniu produkcji jest opisana m.in. w pracy [6]. Wielopoziomowa struktura metody umożliwia zaliczenie jej do hierarchicznych koncepcji rozwiązywania problemów. Problematyka dotycząca hierarchicznego planowania (wady i zalety) została opisana m.in. w pracy [8].

Do najważniejszych cech charakterystycznych opracowanej metody należy również uwzględnienie produktów wielowariantowych. Oznacza to, że w przypadku każdego produktu uwzględnione mogą być indywidualne wymagania. Wyroby, którym przypisano jednakowe operacje podstawowe dotyczą jednego *typu produktu*. Mogą być im przydzielone operacje dodatkowe związane z nadaniem produktowi specyficznych cech. Dany *typ produktu* może więc obejmować różne *produkty*. Różnica pomiędzy wyróżnionymi pojęciami została wyjaśniona też graficznie – w rozdziale 3.

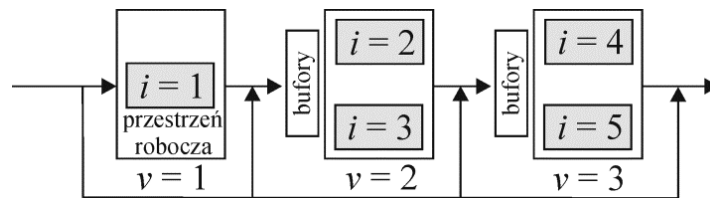
Ponadto należy rozróżnić dwa stosowane terminy: *operacja* oraz *typ operacji*. Każda operacja przypisana jest produktowi przepływającemu przez system. Typ operacji to szersze pojęcie. Określony typ przyporządkowany jest każdej operacji. W przypadku operacji technologicznych jest to rezultat dokonanej typizacji operacji. Polega ona, zgodnie z definicją podaną w pracy [2], na tworzeniu jednolitych, typowych operacji dla sklasyfikowanych i podobnych technologicznie części produktów, w celu wykorzystania tych samych maszyn do wykonania danego typu operacji.

Powyżej wyjaśnione terminy oraz przedstawiona problematyka pokazują, że opracowana metoda jest związana z *technologią grupową*. Produkty grupowane są bowiem ze względu na operacje technologiczne, wśród których część jest identyczna (w przypadku grupy produktów), a niektóre mogą być podobne (w przypadku poszczególnych wariantów produktów). Grupowanie produktów upraszcza planowanie produkcji i sterowanie nią. Do podstawowych zalet technologii grupowej należy m.in. obniżenie kosztów jednostkowych oraz elastyczność produkcji.

Ogólna prezentacja metody, dotyczącej opisanej problematyki, dokonana jest w następnym rozdziale. Szczegółowy opis metody zawarto w rozdziale 3. Wyniki eksperymentów obliczeniowych, służących do weryfikacji metody, zestawiono w rozdziale 4.

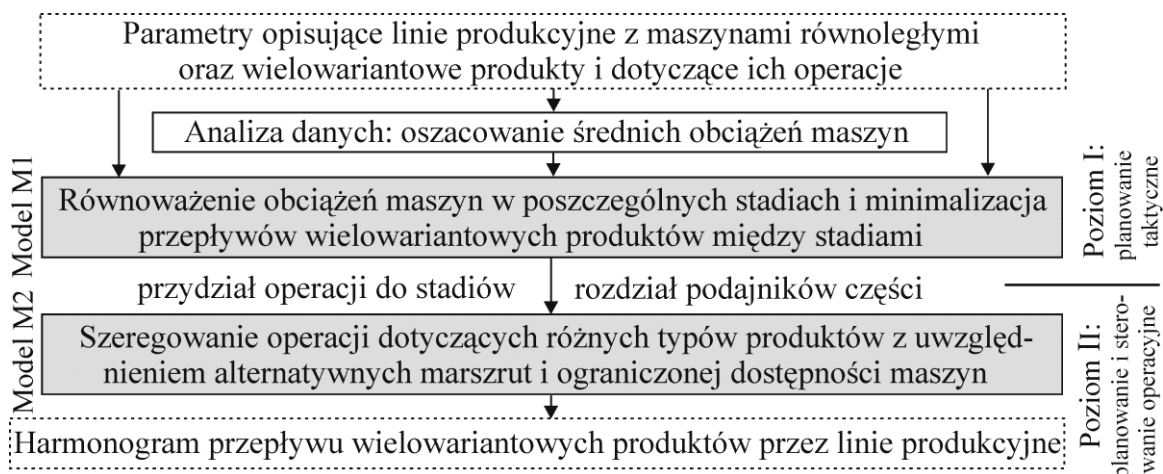
## 2. Zadanie i sposób jego rozwiązania

Na rysunku 1 pokazano przykładową strukturę jednokierunkowej linii produkcyjnej, której dotyczy metoda. Każde stadium  $v = 1, 2, 3$  tej linii to zbiór równoległych maszyn o indeksach  $i$ . Produkt przepływający przez dane stadium obciąża tylko jedną maszynę. Niektóre stadia mogą być ominięte przez produkt. Pomiędzy stadiami znajdują się buforu międzyoperacyjne, w których produkty mogą oczekiwać na wykonanie kolejnych operacji. Wokół każdej z maszyn znajduje się przestrzeń robocza, w której mogą być umieszczane urządzenia pomocnicze. W przypadku operacji polegającej na domontowaniu części, rezerwowana jest przestrzeń robocza odpowiedniej maszyny, w której umieszczany jest podajnik części. W metodzie uwzględniono alternatywne marszruty, co oznacza, że dany typ operacji przydzielany jest do co najmniej jednego stadium. Dzięki temu produkty tego samego typu mogą przemieszczać się alternatywnymi marszrutami. Jednakże dla każdego produktu (każdej sztuki) wyznaczana jest dokładnie jedna marszruta.



Rys. 1. Przykładowa struktura linii produkcyjnej z maszynami równoległymi

Przez linię produkcyjną o opisanej konfiguracji mogą równocześnie przepływać produkty różnych typów, a każdemu typowi mogą być przydzielone odmienne warianty. Należy zbudować taki najkrótszy harmonogram przepływów produktów, w którym zrównoważone są obciążenia maszyn i jak najmniejsza jest liczba przepływów międzystadialnych. Na rysunku 2 przedstawiono schemat blokowy hierarchicznej metody przeznaczonej do rozwiązania tego zadania.



Rys. 2. Schemat blokowy hierarchicznej metody

W rozwiązywanym zadaniu należy uwzględnić wiele danych dotyczących przepływających produktów, a także parku maszynowego. Dokonywana na poziomie I

analiza danych ma na celu oszacowanie średnich obciążeń maszyn umieszczonych w stadiach, z uwzględnieniem ograniczonej dostępności maszyn. Następnie, zgodnie ze schematem zamieszczonym na rysunku 2, na poziomie II ma miejsce równoczesne równoważenie obciążeń maszyn należących do danych stadiów oraz minimalizacja przepływów międzystadialnych. Zbudowany został w tym celu model matematyczny zadania PC uwzględniający oba kryteria. Po zastosowaniu tego modelu znane są przydziały poszczególnych operacji do stadiów, a także rozdział podajników części. Przydział operacji do maszyn dokonywany jest na najniższym poziomie za pomocą odrębnego modelu zadania PC. Operacje przydzielane są do maszyn w taki sposób, aby uwzględnić wyznaczone na poziomie I przydziały operacji do stadiów, a wyznaczany harmonogram przepływów produktów był najkrótszy. Modele matematyczne przypisane poszczególnym poziomom metody zaprezentowano w następnym rozdziale.

### 3. Matematyczny opis metody

W celu rozwiązania zadania opisanego w poprzednim rozdziale zostały zbudowane następujące modele matematyczne:

- model M1 – dotyczy poziomu I, przeznaczony do równoczesnego równoważenia obciążeń maszyn i minimalizacji liczby przepływów międzystadialnych;
- model M2 – dotyczy poziomu II, służy do budowy harmonogramów równoczesnych przepływów produktów różnych typów, marszrutami alternatywnymi.

Dane oraz zmienne wykorzystane w procedurze dotyczącej oszacowania średnich obciążeń maszyn w stadiach, przypisanej poziomowi I (zgodnie z rysunkiem 2), a także wykorzystywane w modelach M1 i M2 zestawiono w tabeli 1.

Tabela 1

Zestawienie oznaczeń indeksów, parametrów i zmiennych

---

#### Podstawowe zbiory:

- $I$  – zbiór maszyn:  $I = \{1, \dots, M\}$ ;  
 $J$  – zbiór typów operacji:  $J = \{1, \dots, N\}$ ;  
 $K$  – zbiór typów produktów:  $K = \{1, \dots, Q\}$ ;  
 $L$  – zbiór przedziałów czasowych:  $L = \{1, \dots, H\}$ ;  
 $S$  – zbiór indeksów produktów:  $S = \{1, \dots, U\}$ ;  
 $V$  – zbiór stadiów:  $V = \{1, \dots, \mathcal{G}\}$ ;

#### Pozostałe zbiory:

- $D$  – zbiór uporządkowanych par  $(i, v)$ , w których maszyna  $i$  należy do stadium  $v$ ;  
 $\mathcal{J}^C$  – zbiór operacji wymagających wykorzystania podajnika części,  $\mathcal{J}^C \subset J$ ;  
 $\mathcal{J}^1$  – zbiór operacji podstawowych,  $\mathcal{J}^1 \subset J$ ;  
 $\mathcal{J}^2$  – zbiór operacji dodatkowych (różnicujących produkty),  $\mathcal{J}^2 \subset J$ ;  
 $O^1$  – zbiór par  $(k, j)$ , w których operacja podstawowa  $j \in \mathcal{J}^1$  jest wykonywana dla produktu typu  $k \in K$ ;  
 $O^2$  – zbiór par  $(s, j)$ , w których operacja dodatkowa  $j \in \mathcal{J}^2$  jest wykonywana dla produktu  $s \in S$ ;

- $R^1$  – zbiór uporządkowanych trójek  $(k, r, j)$ , w których kolejno wykonywane operacje podstawowe  $r, j \in J^1$  dotyczą produktu typu  $k$ ;
- $R^2$  – zbiór uporządkowanych trójek  $(s, r, j)$ , w których kolejno wykonywane operacje  $r, j \in J$  dotyczą produktu  $s$ , w przypadku których co najmniej jedna operacja należy do zbioru  $J^2$ , dzięki czemu reprezentowane są indywidualne ograniczenia kolejnościowe dotyczące produktu  $s$ ;
- $T$  – zbiór uporządkowanych par  $(s, k)$ , w których produkt o indeksie  $s$  jest typu  $k$ ;
- $V_j$  – zbiór stadiów, zawierających maszyny zdadne do wykonania operacji  $j \in J$ ;

**Parametry i ich jednostki:**

- $a_{vj}$  – przestrzeń robocza maszyny umieszczonej w stadium  $v$  wymagana do wykonania operacji  $j$  [ $m^3$ ];
- $b_v$  – przestrzeń robocza maszyny umieszczonej w stadium  $v$ , w której mogą być umieszczone podajniki [ $m^3$ ];
- $g_{vk}$  – czas transportu produktu  $k$  z maszyny, na której uprzednio zakończono operację do maszyny w stadium  $v$  [s] (dotyczy wyłącznie modelu M2);
- $p_{jk}^1$  – czas wykonywania operacji podstawowej  $j \in J^1$  dla produktu typu  $k$  [s];
- $p_{js}^2$  – czas wykonywania operacji dodatkowej  $j \in J^2$  dla produktu  $s$  [s];
- $\mu_{il} = 1$ , jeżeli maszyna  $i$  jest dostępna w przedziale czasowym  $l$ , inaczej  $\mu_{il} = 0$ ;
- $\rho_v$  – liczba buforów międzyoperacyjnych umieszczonych przed stadium  $v$ ;
- $\lambda$  – waga kryterium dotyczącego obciążenia maszyn, gdzie  $\lambda \in [0, 1]$ ;

**Zmienne:**

- dotyczące tylko modelu M1:

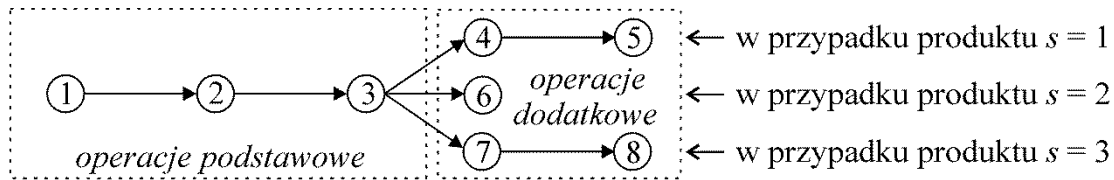
- $x_{ij} = 1$ , jeżeli typ operacji  $j$  przydzielono do maszyny  $i$ , inaczej  $x_{ij} = 0$ ;
- $y_{vs} = 1$ , jeżeli produkt  $s$  przepływa przez stadium  $v$ , inaczej  $y_{vs} = 0$ ;
- $z_{ijs} = 1$ , jeżeli do maszyny  $i$  przydzielono operację  $j$  wykonywaną dla produktu  $s$ ,  
inaczej  $z_{ijs} = 0$ ;

- $P_{\max}$  – obciążenie maszyny stanowiącej wąskie gardło w linii produkcyjnej;

- dotyczące tylko modelu M2:

- $q_{isl} = 1$ , jeżeli w przedziale czasowym  $l$  operacje dotyczące produktu  $s$  wykonywane są na maszynie  $i$ ; inaczej  $q_{isl} = 0$ ;
- $w_{vsl} = 1$ , jeżeli w przedziale czasowym  $l$  produkt  $s$  znajduje się w buforze umieszczonym przed stadium  $v$ , inaczej  $w_{vsl} = 0$ ;

Analiza danych zamieszczonych w tabeli 1 pokazuje wyróżnienie dwóch zbiorów operacji: podstawowych  $J^1$  oraz dodatkowych  $J^2$ . Przykład takich dwóch zbiorów zamieszczono na rysunku 3, ilustrującym ograniczenia kolejnościowe w wykonaniu produktów. Zbiory te można zapisać:  $J^1 = \{1, 2, 3\}$ ,  $J^2 = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ . Operacje podstawowe przypisane są typowi produktu (zbiór  $J^1$ ) i wykonywane są w przypadku wszystkich wariantów wyrobów dotyczących danego typu produktów. Każdy z wielowariantowych produktów może mieć jednak nadane specyficzne cechy dzięki wykonaniu operacji dodatkowych (zbiór  $J^2$ ). Umożliwia to uwzględnienie indywidualnych wymagań odbiorców. Typ produktu, którego dotyczy rysunek 3, to tuleja. Może być ona wykonana w 3 wariantach – przypisanych poszczególnym produktom. W przypadku przykładowej tulei opisano 8 typów operacji. Do wykonania jest jednak 14 operacji, gdyż operacje podstawowe dotyczą wszystkich 3 wariantów produktu.



Typy operacji dotyczących produktu typu  $k = 1$  (tuleja):

**podstawowych:**

- 1 – obróbka zgrubna i kształtująca powierzchni zewnętrznej, wstępne wykonanie otworu;
- 2 – obróbka wykończająca powierzchni zewnętrznej (na szlifierce bezkłowej);
- 3 – obróbka kształtująca i wykończająca otworu (na szlifierce bezkłowej);

**dodatkowych:**

- 4 – wykonanie gwintu gwintownikiem zgrubnym;
- 5 – wykonanie gwintu gwintownikiem wykańczającym;
- 6 – bardzo dokładna obróbka otworu;
- 7 – wykonanie otworów poprzecznych;
- 8 – obróbka wykańczająca otworów poprzecznych.

Rys. 3. Przykład grafu ograniczeń kolejnościowych dotyczących wielowariantowego produktu typu tuleja – wykonywanego w 3 wariantach ( $s = 1, 2, 3$ )

Każdy produkt przepływający przez linię produkcyjną ma inny indeks  $s$  (przypisany danej sztuce, tab. 1). Produkty tego samego typu mają ten sam indeks  $k$ . Przyporządkowanie produktom określonych typów znane jest dzięki  $T$  – zbiorowi ciągów  $(s, k)$ . W przypadku tulei przedstawionej na rysunku 3 zbiór ten ma postać:  $T = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\}$ . Różne warianty danego produktu charakteryzują się więc takim samym typem produktu  $k$ , ale odmiennymi indeksami  $s$ .

Niech  $d_k$  oznacza zapotrzebowanie na produkty typu  $k$  (popyt). Oznacza to, że istnieje  $d_k$  ciągów dotyczących danego typu produktu  $k$  i różnych  $s \in S$ . Dzięki temu spełnione jest równanie (1).

$$\sum_{k \in K} d_k = \bar{S} \quad (1)$$

We wszystkich wariantach danego produktu spełnione są ograniczenia kolejnościowe reprezentowane przez zbiór  $R^1$ . W przypadku tulei, której dotyczy rysunek 3, zbiór ten ma postać:  $R^1 = \{(1, 1, 2), (1, 2, 3)\}$ . Dla każdego produktu  $s$  mogą być jednak wymagane dodatkowe ograniczenia, związane z wykonaniem operacji, dzięki którym ten produkt będzie się wyróżniał. W przypadku grafu ograniczeń kolejnościowych zamieszczonego na rysunku 3, zbiór dotyczący tych dodatkowych ograniczeń ma postać:  $R^2 = \{(1, 3, 4), (1, 4, 5), (2, 3, 6), (3, 3, 7), (3, 3, 8)\}$  – zgodnie z notacją opisaną w tabeli 1 elementami zbioru są trójki: (indeks produktu, nr operacji poprzedniej, nr operacji następnej). Elementami tych trójek są zarówno operacje dodatkowe (niekoniecznie muszą być wykonywane jako ostatnie), jak i podstawowe – jednakże każda z trójek zawartych w zbiorze  $R^2$  zawiera co najmniej jedną operację dodatkową, gdyż zbiór ten odzwierciedla dodatkowe ograniczenia dotyczące kolejności wykonywania operacji.

W celu uwzględnienia planowanych przestoju maszyn wykorzystana jest znajomość wartości parametrów  $\mu_{il}$  (tab. 1) w oszacowanym okresie obciążenia maszyn  $LBP_{\max}$ , wyznaczanym wg następującej procedury:

- 1) Wyznacz na podstawie (2)  $\delta_s$  – całkowity czas wykonywania wszystkich operacji: podstawowych oraz dodatkowych dotyczących produktu  $s \in S$ .

$$\delta_s = \sum_{k \in K: (s,k) \in T} \sum_{j \in J^1: (k,j) \in O_1} p_{jk}^1 + \sum_{j \in J^2: (s,j) \in O^2} p_{js}^2; \quad s \in S \quad (2)$$

2) Stosując równanie (3) oblicz średni czas obciążenia maszyn, zaokrąglony do najbliższej liczby całkowitej ( $M$  – liczba maszyn, round – funkcja zaokrąglenia).

$$\bar{\delta} = \text{round} \left( \frac{1}{M} \sum_{s \in S} \delta_s \right) \quad (3)$$

3) W przypadku każdej maszyny  $i \in I$  oszacuj jej minimalne obciążenie  $\omega_i$ , uwzględniające planowane przestoje. Przyjmij indeks maszyny  $i := 1$  i wykonaj czynności:

- a) Przyjmij  $\omega_i := 1$  i idź do kroku 3b.
- b) Jeżeli warunek (4) jest spełniony dla maszyny  $i$ , idź do kroku 3d, jeśli nie – idź do kroku 3c.

$$\sum_{\tau=1}^{\omega_i} \mu_{i\tau} = \bar{\delta} \quad (4)$$

c) Jeżeli  $\omega_i < H$  ( $H$  – liczba przedziałów czasowych) to przyjmij  $\omega_i := \omega_i + 1$  a następnie wróć do kroku 3b. W przypadku, gdy  $\omega_i = H$  i nie został spełniony warunek (4) należy zmodyfikować dane w celu umożliwienia wykonania wszystkich operacji. Modyfikacja ta polega na zwiększeniu wartości  $H$  (wydłużeniu okresu planowania) lub zwiększeniu dostępności maszyny w kolejnych okresach (zmiana harmonogramu planowanych przestojów).

d) Jeżeli  $i < M$  ( $M$  – liczba maszyn) to wróć do kroku 3a, w przeciwnym razie idź do kroku 4, w którym uwzględnione zostaną wyznaczone wartości  $\omega_i$  dotyczące oszacowań minimalnych obciążeń poszczególnych maszyn  $i = 1, \dots, M$ .

4) Stosując równanie (5) wyznacz  $LBP_{\max}$ .

$$LBP_{\max} = \max_{i \in I} \omega_i \quad (5)$$

W opracowanej metodzie można również uwzględniać losowe przestoje maszyn. W tym celu wykorzystywana jest znajomość funkcji niezawodności  $F_i(t)$  każdej maszyny  $i$ . [3]. Funkcja ta (6) dla każdego czasu ustalonego  $t \geq 0$  ma wartość równą prawdopodobieństwu znajdowania się maszyny  $i$  do chwili  $t = LBP_{\max}$  w stanie zdatności. Jest to więc prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na nie wystąpieniu awarii maszyny  $i$  do chwili  $t$ .  $E_i$  to zmienna losowa oznaczająca czas zdatności maszyny  $i$ . W przypadku braku danych dotyczących  $F_i(t)$  należy przyjąć  $F_i(t) = 1$  dla poszczególnych maszyn  $i$ , co oznacza, że nie ma losowych przestojów maszyn (nie są one uwzględniane).

$$F_i(t) = P(E_i \geq t); \quad t = LBP_{\max} \quad (6)$$

Zestawione w tabeli 1 parametry i zmienne, jak i również zdefiniowane w zależnościach (4) i (5) dodatkowe dane, uwzględniono w przedstawionych w dalszej części artykułu modelach zadań programowania całkowitoliczbowego (PC). Jako pierwszy prezentowany jest model dotyczący poziomu I metody. Oto ten model:

**Model M1** do równoczesnego równoważenia obciążeń maszyn i minimalizacji przepływów wielowariantowych produktów alternatywnymi marszrutami:

Zminimalizować: 
$$\lambda P_{\max} + (1 - \lambda) \sum_{v \in V'} \sum_{s \in S} y_{vs} \quad (7)$$

przy ograniczeniach:

$$\frac{1}{F_i(LBP_{\max})} \left( \sum_{(k,j) \in O^1} \sum_{s \in S} p_{jk}^1 z_{ijs} + \sum_{(s,j) \in O^2} p_{js}^2 z_{ijs} + \sum_{l \in L: l \leq LBP_{\max}} \sum_{i \in I} (1 - \mu_{il}) \right) \leq P_{\max}; \quad i \in I \quad (8)$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \geq 1; \quad j \in J \quad (9)$$

$$\sum_{j \in J^c} a_{vj} x_{ij} \leq b_v; \quad (i, v) \in D \quad (10)$$

$$x_{ij} = 0; \quad (i, v) \in D; \quad j \in J; \quad v \notin V_j \quad (11)$$

$$\sum_{i \in I} z_{ijs} = 1; \quad (s, k) \in T; \quad j \in J: (k, j) \in O^1 \vee (s, j) \in O^2 \quad (12)$$

$$z_{ijs} \leq x_{ij}; \quad i \in I; \quad j \in J; \quad (s, k) \in T: (k, j) \in O^1 \vee (s, j) \in O^2 \quad (13)$$

$$z_{ijs} + z_{irs} \leq 1; \quad (i, v), (\tau, v) \in D; \quad r, j \in J; \quad s \in S; \quad i \neq \tau; \quad r \neq j \quad (14)$$

$$\sum_{i \in I} i z_{ijs} \leq \sum_{i \in I} i z_{irs}; \quad j, r \in R; \quad (s, k) \in T: (k, j, r) \in R^1 \vee (s, j, r) \in R^2 \quad (15)$$

$$y_{vs} \geq z_{ijs}; \quad (i, v) \in D; \quad j \in J; \quad (s, k) \in T: (k, j) \in O^1 \vee (s, j) \in O^2 \quad (16)$$

$$x_{ij}, y_{vs}, z_{ijs} \in \{0, 1\}; \quad i \in I; \quad j \in J; \quad s \in S; \quad v \in V \quad (17)$$

W minimalizowanej ważonej funkcji (7) uwzględniono dwa kryteria. Po pierwsze funkcja ta służy do równoważenia obciążeń maszyn. Minimalizacja obciążenia najbardziej obciążonej maszyny, zwanej wąskim gardłem, prowadzi oczywiście do zrównoważenia obciążeń maszyn (temu celowi służy pierwszy składnik funkcji (7)). Po drugie w funkcji (7) wzięto pod uwagę liczbę przepływów produktów przez poszczególne stadia. W związku z minimalizacją wartości tej funkcji istnieje możliwość wyznaczania takich przydziałów produktów do maszyn, w których każdy produkt przepływa przez jak najmniejszą liczbę stadiów [7]. Obu uwzględnianym kryteriom (dotyczącym obciążeń maszyn oraz liczby przepływających produktów przez stadia) przypisywane są wagi. W opisywanej funkcji (7)  $\lambda \in [0, 1]$  jest współczynnikiem wagi dotyczącej najbardziej obciążonej maszyny w systemie produkcyjnym. Kryterium dotyczące liczby przepływów produktów przez stadia ma przypisaną wagę  $1 - \lambda$ . Dzięki uwzględnieniu wag, dotyczących kryteriów, problem optymalizacji wielokryterialnej sprowadzony został do zadania jednokryterialnego. Wartość parametru  $\lambda$  ma istotne znaczenie dla rozwiązywanego zadania. Należy zauważyć, że oba kryteria nie dotyczą jednakowych jednostek. Ponadto mogą być różne rzędy wielkości składników funkcji celu (7) w przypadku obu kryteriów. W związku z tym wskazane jest zastosowanie dialogowej procedury optymalizacji dwukryterialnej [7] do doboru wag. Ta interaktywna procedura służy do wyznaczania rozwiązań dla 3 wag testowych w każdej iteracji. W przypadku, w którym żadne z 3 rozwiązań nie satysfakcjonuje decyden-ta, zmieniany jest obszar poszukiwań. Nowy obszar poszukiwań uzależniony jest od wartości funkcji celu i wag testowych, branych pod uwagę w poprzedniej iteracji.

Ograniczenie (8) dotyczy pierwszego kryterium – służy ono do wyznaczenia obciążenia maszyny najbardziej obciążonej. Ograniczona dostępność maszyn została wzięta pod uwagę dzięki uwzględnieniu parametrów  $\mu_{il}$  (dotyczących planowanych przestojów maszyn), a także w wyniku zastosowaniu funkcji niezawodności poszcze-



gólnych maszyn (6) (związanych z losowymi przestojami maszyn). W przypadku planowania krótkookresowego lub braku znajomości tej funkcji można ją pominąć – w takim przypadku brane są pod uwagę tylko planowane przestoje maszyn.

Kolejne ograniczenia dotyczące modelu M1 zapewniają: (9) – alternatywność marszrut przepływów – wielowariantowe produkty tego samego typu mogą mieć różne marszruty przepływów (każdemu wariantowi produktu przypisana jest jednak jedna marszruta); (10) – uwzględnienie ograniczonej przestrzeni roboczej każdej z maszyn; (11) – eliminację niewłaściwych przydziałów typów operacji do maszyn, których nie są zdadne wykonać tych czynności; (12) – rozdział wszystkich operacji podstawowych i dodatkowych dotyczących wielowariantowych produktów; (13) – przepływy produktów przez te maszyny, którym przydzielono możliwość wykonywania typów operacji wymaganych dla tych produktów; (14) – przepływ produktu przez co najwyżej jedną maszynę danego stadium; (15) – wykonywanie operacji podstawowych i dodatkowych zgodnie z danymi ograniczeniami dotyczącymi kolejności ich wykonywania, a także jednokierunkowość przepływu produktów; (16) – wyznaczenie stadiów, przez które przepływają poszczególne produkty; (17) – binarność zmiennych decyzyjnych.

Wyznaczone wartości zmiennych  $z_{ijs}$ , określających przydziały operacji  $j$ , wykonywanych dla produktów  $s$ , do maszyn  $i$  stanowią dane wejściowe do zadania rozwiązywanego na poziomie II. Wykorzystano je w równaniu (18) przeznaczonym do wyznaczenia  $t_{is}$  – czasów obciążeń poszczególnych maszyn  $i$  przez produkty  $s$ .

$$t_{is} = \sum_{k \in K: (s,k) \in T} \sum_{j \in J^1: (k,j) \in O^1} p_{jk}^1 z_{ijs} + \sum_{j \in J^2: (s,j) \in O^2} p_{js}^2 z_{ijs}; \quad i \in I; s \in S \quad (18)$$

Opisane parametry  $t_{is}$ , jak i również zestawione w tabeli 1 oznaczenia zostały zastosowane na w modelu matematycznym dotyczącym poziomu II metody.

**Model M2** przeznaczony do budowy harmonogramów równoczesnych przepływów różnych typów produktów wielowariantowych:

Zminimalizować: 
$$\sum_{i \in I} \sum_{l \in L} \sum_{s \in S} l q_{isl} \quad (19)$$

Przy ograniczeniach: 
$$\sum_{i \in I} q_{isl} = t_{is}; \quad l \in L; s \in S \quad (20)$$

$$\sum_{s \in S} q_{isl} \leq \mu_{il}; \quad i \in I; l \in L \quad (21)$$

$$l q_{isl} - f q_{isf} \leq t_{is} - 1 + (H + 1)(1 - q_{isf}); \quad i \in I; l, f \in L; l > f; s \in S \quad (22)$$

$$\sum_{l \in L} \frac{l q_{isl}}{t_{is}} - \sum_{l \in L} \frac{f q_{isf}}{t_{is}} - \frac{t_{is} + t_{is}}{2} \geq g_{vk};$$

$$(i, v) \in D; \tau \in I; (s, k) \in T; \sum_{\rho \in I: \tau \leq \rho \leq i} t_{\rho s} = t_{is} + t_{\tau s}; \quad t_{is}, t_{\tau s} > 0 \quad (23)$$

$$q_{isl} \in \{0, 1\}; \quad i \in I; l \in L; s \in S \quad (24)$$

Dzięki minimalizowanej sumie (19) produkty obciążają przedziały czasowe o jak najmniejszych indeksach, co umożliwi budowę najkrótszych harmonogramów. W dokonywanym za pomocą modelu M2 rozdziale operacji w czasie spełnione są następujące ograniczenia: (20) – każdy wielowariantowy produkt obciąża te maszyny, którym na poziomie I przypisano wykonywanie operacji dotyczących tego produktu, a czas obciążeń poszczególnych maszyn jest uzależniony od danych czasów wykonywania

operacji – łączny czas wykonywania operacji w przypadku maszyny  $i$  oraz produktu  $s$  wynosi  $t_{is}$ ; (21) – produkty obciążają maszyny wyłącznie w okresach ich dostępności, a każda maszyna w danej chwili wykonuje operacje dotyczące nie więcej niż jednego produktu; (22) – operacje dotyczące danego produktu wykonywane na określonej maszynie nie powinny być przerwane – mają być wykonywane w sposób ciągły; (23) – przepływ produktów jest jednokierunkowy, a także zarezerwowany jest odpowiedni czas na transport produktu pomiędzy maszynami należącymi do różnych stadiów; (24) – binarne są zmienne, określające rozdział operacji w czasie.

Opisane zależności matematyczne dotyczą linii produkcyjnych, w których bufory międzyoperacyjne mają nieograniczone pojemności. Dotyczą one produktów o małych gabarytach. W przypadku linii produkcyjnych wyposażonych w bufory międzyoperacyjne o ograniczonych pojemnościach muszą być spełnione dodatkowo relacje:

$$\sum_{l \in L} \frac{lq_{isl}}{t_{is}} - \sum_{l \in L} \frac{lq_{\tau sl}}{t_{\tau s}} - \frac{t_{is} + t_{\tau s}}{2} - g_{vk} \leq \sum_{l \in L} w_{vsl}; \quad (s, k) \in T; \quad l \in L;$$

$$(i, v), (\tau, \varepsilon) \in D; \quad v \neq 1; \quad t_{is}, t_{\tau s} > 0; \quad v > \varepsilon; \quad \sum_{\psi=\tau}^i t_{\psi s} = t_{\tau s} + t_{is} \quad (25)$$

$$lw_{vsl} \geq \sum_{f \in L} \frac{f\hat{q}_{\tau sf}}{t_{\tau s}} + \frac{t_{\tau s} + 1}{2} + g_{vk} - (H + 1)(1 - w_{vsl}); \quad (s, k) \in T; \quad l \in L;$$

$$(i, v), (\tau, \varepsilon) \in D; \quad v \neq 1; \quad t_{\tau s} > 0; \quad v > \varepsilon; \quad \sum_{\psi=\tau}^i t_{\psi s} = t_{\tau s} + t_{is} \quad (26)$$

$$\sum_{f \in L} \frac{f\hat{q}_{isf}}{t_{is}} - \frac{t_{is} - 1}{2} - lw_{vsl} \geq 1; \quad l \in L; \quad (i, v) \in D; \quad v \neq 1; \quad s \in S; \quad t_{is} > 0 \quad (27)$$

$$\sum_{s \in S} w_{vsl} \leq \rho_v; \quad l \in L; \quad v \in V \setminus \{1\} \quad (28)$$

$$w_{vsl} \in \{0, 1\}; \quad l \in L; \quad s \in S; \quad v \in V \quad (29)$$

Prawa strona nierówności (25) przedstawia liczbę przedziałów czasowych, w których produkt  $s$  typu  $k$  ma przebywać w buforze umieszczonym przed stadium  $v$ . Produkt znajduje się w buforze po zakończeniu operacji (poprzedniej) i przetransportowaniu go do tego magazynu lokalnego – zapewnia to ograniczenie (26), a przebywa w tym buforze do czasu rozpoczęcia następnej operacji – gwarantuje to relacja (27). Ograniczone pojemności buforów zostały uwzględnione w relacji (28) – w jednym buforze może być w danej chwili co najwyżej jeden produkt. Warunek (29) zapewnia binarność zmiennych decyzyjnych określających wykorzystanie buforów.

#### 4. Weryfikacja metody

Przeprowadzone eksperymenty obliczeniowe służyły przede wszystkim do weryfikacji metody. Eksperymentami tymi objęto 4 grupy zadań testowych. W przypadku każdej z grup rozwiązano 25 przykładów. Modele matematyczne zakodowano w języku AMPL (ang. *A Mathematical Programming Language*) [1], następnie wygenerowano pliki \*.mps i wykorzystano GUROBI Optimizer 6.5 ([www.gurobi.com](http://www.gurobi.com)) w celu rozwiązania kolejnych przykładów. Eksperymenty obliczeniowe wykorzystano rów-

niez do symulacji – badania wpływu dobieranych wag  $\lambda$  na wyznaczone harmonogramy. W celu porównania obciążenia najbardziej obciążonej maszyny  $P_{\max}$  z oszacowanym wg (5) największym obciążeniem wąskiego gardła  $LBP_{\max}$  zdefiniowano w (30) wskaźniki  $\eta_\lambda$  dotyczące różnych wag  $\lambda$ . W eksperymentach wyodrębniono również drugie kryterium. Wyznaczone wg (31) wskaźniki  $\gamma_\lambda$  służą bowiem do porównania liczby przemieszczeń produktów, w zależności od wartości wagi  $\lambda$ . W równaniu (31)  $Y_\lambda$  przedstawia liczbę przepływów wielowariantowych produktów przez poszczególne stadia, przy uwzględnieniu wagi  $\lambda$ . Liczba tych przepływów odnoszona jest do minimalnej liczby przepływów (w przypadku  $\lambda = 0$ ), reprezentowanej przez  $Y_0$ .

Wymienione wskaźniki dotyczą jednak planowania taktycznego, z którym związany jest model M1. W celu porównania wyznaczanych długości harmonogramów, budowanych w oparciu o model M2, zdefiniowano w równaniu (32) wskaźniki  $\psi_\lambda$ . We wskaźnikach tych  $C_{\max}^\lambda$  oznacza długość harmonogramu wyznaczonego w przypadku wagi  $\lambda$ .  $C_{\max}^1$  oznacza długość harmonogramu, gdy  $\lambda = 1$ , czyli uwzględnione jest tylko kryterium – dotyczące minimalizacji obciążeń maszyn.

$$\eta_1 = \frac{P_{\max} - LBP_{\max}}{LBP_{\max}} \cdot 100\% \text{ (dla } \lambda=1); \quad \eta_{0,5} = \frac{P_{\max} - LBP_{\max}}{LBP_{\max}} \cdot 100\% \text{ (dla } \lambda=0,5) \quad (30)$$

$$\gamma_\lambda = \frac{Y_\lambda - Y_0}{Y_0} \cdot 100\%, \quad \text{gdzie } Y_\lambda = \sum_{v \in I'} \sum_{s \in S} y_{vs} \quad (31)$$

$$\psi_\lambda = \frac{C_{\max}^\lambda - C_{\max}^1}{C_{\max}^1} \cdot 100\%, \quad \text{gdzie } C_{\max}^\lambda = \max_{i \in I', s \in S, l \in L} lq_{isl} \quad (32)$$

Parametry grup zadań oraz wartości średnie wskaźników zestawiono w tabeli 2.

Przeprowadzone symulacje obciążeń maszyn pokazały wpływ zmniejszenia wartości wagi kryteriów  $\lambda$  ( $\lambda = 0,6, \lambda = 0,4$ ) na wzrost obciążenia maszyny stanowiącej wąskie gardło w linii produkcyjnej. Potwierdzają to wartości wskaźników  $\eta_{0,6}$  oraz  $\eta_{0,4}$ . Wzrost rozmiaru rozwiązywanego zadania wpływa jednak na zmniejszenie wartości tych wskaźników. Jest to m.in. skutek uwzględnienia alternatywnych marszrut. Na wartości opisywanych wskaźników ma wpływ szereg innych czynników, np. możliwości technologiczne maszyn (ich zdatność do wykonywania operacji), dostępność maszyn, czy ograniczenia dotyczące kolejności wykonywania operacji.

Tabela 2

Parametry grup zadań i wyniki eksperymentów obliczeniowych

Grupa zadań	Parametry grupy zadań					Wartości średnie wskaźników [%]							
	$\mathcal{G}$	$M$	$N$	$Q$	$U$	$\eta_1$	$\eta_{0,6}$	$\eta_{0,4}$	$\gamma_{0,7}$	$\gamma_{0,5}$	$\psi_{0,8}$	$\psi_{0,6}$	$\psi_{0,4}$
1	2	4	8	3	9	4,8	7,8	12,2	8,8	4,2	4,2	6,3	11,5
2	2	6	10	4	12	4,7	7,0	9,8	9,4	4,7	4,1	5,5	9,2
3	3	6	12	5	15	3,5	6,3	8,1	10,3	6,6	3,7	4,9	7,3
4	3	8	14	6	18	2,5	4,2	7,5	11,9	8,7	2,3	4,5	7,0

Liczby:  $\mathcal{G}$  – stadiów,  $M$  – maszyn,  $N$  – typów operacji,  $Q$  – typów produktów,  $U$  – wielowariantowych produktów. Ponadto: nieograniczone pojemności buforów, nieograniczona dostępność maszyn.

Jak wykazują zamieszczone w tabeli 2 wyniki eksperymentów obliczeniowych, równoważenie obciążeń maszyn wpływa na zwiększenie liczby przepływów produk-

tów przez stadia, co potwierdzają wyznaczone wartości wskaźników  $\gamma_{0,7}$  oraz  $\gamma_{0,5}$ , dzięki którym odzwierciedlony jest konflikt pomiędzy dwoma uwzględnianymi kryteriami w modelu M1. Wartości wag dotyczących obu kryteriów mają wpływ na wyznaczone długości harmonogramów, co zostało wykazane za pomocą wskaźników  $\psi_\lambda$  – najkrótsze harmonogramy wyznaczone były przeważnie przy zrównoważeniu obciążeń maszyn, z którym związana była relatywnie znaczna liczba przepływów produktów.

## 5. Uwagi i wnioski

Przedstawiona metoda umożliwia przeprowadzanie symulacji – badania wpływu obciążeń maszyn (w tym zrównoważenia obciążeń maszyn) oraz liczby przepływających produktów przez poszczególne stadia na długość wyznaczanego harmonogramu. Alternatywne marszruty przepływów wielowariantowych produktów (a właśnie takich dotyczy metoda) z jednej strony ułatwiają zrównoważenie obciążeń maszyn, z drugiej zaś strony wpływają na zwiększenie liczby przepływów produktów przez poszczególne stadia. Uwzględnienie sztywnych marszrut produkcyjnych (w których każdy typ operacji przydzielony jest do tylko jednego stadium) ułatwiłoby modelowanie przepływów produktów. Zastosowanie sztywnych marszrut skutkuje mniejszą liczbą przemieszczeń produktów pomiędzy stadiami i przeważnie większym zróżnicowaniem obciążeń maszyn – w porównaniu do alternatywnych marszrut. Model matematyczny dotyczący sztywnych marszrut oraz wyniki eksperymentów obliczeniowych służących do porównania dwóch rodzajów marszrut autor artykułu przedstawił w pracy [5] poświęconej planowaniu taktycznemu, jednakże nie uwzględniono w niej wielowariantowych produktów.

W budowanym harmonogramie uwzględniono planowane i losowe przestoje maszyn. W opracowanej specjalnie do wykorzystania w opracowanej metodzie procedurze oszacowania obciążeń maszyn wykorzystywane są dane zawierające informacje o planowanych przestojach (np. remontach). W przypadku planowania krótkookresowego nie jest oczywiście konieczne wzięcie pod uwagę losowych przestojów maszyn.

Opracowana metoda dotyczy linii produkcyjnych wyposażonych w bufory międzyoperacyjne. W przypadku linii produkcyjnych, w których nie ma tych lokalnych magazynów, można zastosować model M1 do planowania taktycznego. Natomiast budowę harmonogramów przepływów produktów można oprzeć np. o modele matematyczne, które autor artykułu opisał w pracy [4].

Do zalet opracowanej metody należy matematyczny opis przepływów wielowariantowych produktów. Wyodrębnienie zbiorów operacji podstawowych i dodatkowych, a także zbioru ograniczeń kolejnościowych opisujących relacje pomiędzy opercjami podstawowymi i zbioru ograniczeń kolejnościowych związanych z nadaniem produktowi wyróżniających mu cech (charakterystycznych dla danego wariantu produktu) wpłynęło korzystnie na złożoność obliczeniową.

Hierarchiczne podejście do planowania przepływów wielowariantowych produktów wpłynęło na możliwość rozwiązywania problemów o relatywnie większych rozmiarach, niż miałyby to miejsce po zastosowaniu podejścia jednopoziomowego. Zastosowanie dwupoziomowego podejścia wynikało m.in. z konieczności uwzględnienia znacznej liczby parametrów i zmiennych dotyczących linii produkcyjnej i produktów oraz znacznej liczby relacji pomiędzy tymi parametrami i zmiennymi (ograniczeń).

Należy również podkreślić znaczenie zastosowania programowania całkowitoliczbowego (PC) w koncepcji rozwiązania opisanego problemu. Dzięki zastosowaniu PC mogą być wyznaczane rozwiązania optymalne zadań przypisanych poszczególnym poziomom metody (w przypadku modelu M1 i wagi  $\lambda = 1$  lub  $\lambda = 0$  wyznaczane są rozwiązania optymalne – ze względu na jedno kryterium). Hierarchiczne podejście do planowania przepływów produktów nie gwarantuje oczywiście budowy optymalnego harmonogramu produkcji. Obserwowany rozwój techniki komputerowej i pakietów optymalizacji dyskretnej sprzyja stosowaniu tego narzędzia badań operacyjnych.

## LITERATURA

1. Fourer R., Gay D., Kernighan B.: AMPL, A Modelling Language for Mathematical Programming, Duxbury Press, Pacific Grove, CA. 2003.
2. Gabrylewicz F.: Typizacja produkcji w przemyśle maszynowym. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1970.
3. Macha E.: Niezawodność maszyn. Wydawnictwa Politechniki Opolskiej. Opole 2001.
4. Magiera M.: Wybrane metody planowania przepływów produktów przez linie produkcyjne i łańcuchy dostaw. Wydawnictwa AGH, Kraków 2016.
5. Magiera M.: Dwukryterialna metoda planowania taktycznego dotyczącego montażu w hybrydowych systemach przepływowych. Technologia i Automatykacja Montażu. Zeszyt nr 2/2016. Warszawa 2016, s. 30–35 (w druku).
6. Pochet Y., Wolsey L.A.: Production planning by mixed integer programming. Series in Operations Research and Financial Engineering, Springer, New York 2006.
7. Sawik T.: Production Planning and Scheduling in Flexible Assembly Systems. Springer-Verlag, Berlin 1999.
8. Schneeweiss Ch.: Hierarchies in Distributed Decision Making. Springer-Verlag, Berlin 1999.
9. Skołod B.: Zarządzanie operacyjne. Produkcja w małych i średnich przedsiębiorstwach. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2006.