

Artur BABIARZ, Krzysztof JASKOT
Politechnika Śląska

DYSKRETNE MODELE UŁAMKOWEGO RZĘDU–MOŻLIWOŚCI ZASTOSOWANIA W ROBOTYCE

Streszczenie. W pracy przedstawiono trzy operatory różnicowe ułamkowego rzędu. Operator Grünwalda-Letnikowa jest najbardziej popularnym operatorem stosowanym w szeroko rozumianej automatyce i robotyce. Pozostałe dwa: Caputo i Riemanna-Louville są mniej znane i ich zastosowanie w robotyce nie było do tej pory rozpatrywane.

DISCRETE-TIME FRACTIONAL MODEL–APPLICATION IN ROBOTICS

Summary. The paper is addressed to fractional difference operators. The first of them: Grünwald-Letnikov operator is the most popular in the automatic control and robotics. The Caputo and Riemann-Louville operators haven't found using in robotics and automatic control yet.

1. Wstęp

Na temat dynamiki i modelowania robotów manipulacyjnych ukazało się bardzo wiele artykułów i książek. Podstawowy kurs z zakresu modelowania robotów z zastosowaniem standardowych równań różniczkowych całkowito-liczbowego rzędu można znaleźć w [5, 18]. W książkach tych są zawarte modele i układy sterowania tylko w czasie ciągłym. Przykład modelowania w czasie dyskretnym wybranych typów robotów manipulacyjnych przedstawiono w [14]. W [8] zaprezentowany został dyskretny model dla robotów manipulacyjnych, w którym uwzględniono eliminację wpływu nieliniowej części pochodzącej od sił tarcia, siły grawitacji i sił Coriolisa. W pracach [16, 19] zaprezentowano modele dyskretnie dla robotów mobilnych.

W przypadku zastosowania rachunku ułamkowego rzędu do modelowania dynamiki robotów trudno znaleźć wyniki dotyczące zarówno modelowania z wykorzystaniem równań w czasie ciągłym jak i dyskretnym. Należy tutaj wspomnieć, że w ostatniej dekadzie teoria rachunku niecałkowitego rzędu stała się bardzo popularna i można zaobserwować jej ciągły rozwój [3, 11] oraz zastosowania do modelowania różnych układów dynamicznych [12, 17].

W robotyce rachunek ułamkowego rzędu znalazł głównie miejsce w zastosowaniu regulatorów ułamkowego rzędu w układach sterowania opartych na modelach standardowych. W pracy [15] przedstawiono układ sterowania robotem mobilnym oparty na regulatorze *PID* ułamkowego rzędu z wykorzystaniem aproksymacji pochodnej ułamkowego rzędu metodą Grünwalda-Letnikowa. Takie samo podejście zaprezentowa-

no w pracy [4] z tym, że obiektem sterowania był prosty robot manipulacyjny. Ponadto, rachunek ułamkowego rzędu został wykorzystany do problemu planowania trajektorii robotów manipulacyjnych. Zaproponowaną metodologię można znaleźć w [9, 10]. W metodach tych wykorzystano własności macierzy jacobianowej robotów.

W prezentowanej pracy skupiono się na wykorzystaniu znanych operatorów różnicowych ułamkowego rzędu do modelowania dynamiki robotów manipulacyjnych. Przedstawiono trzy modele opisujące dynamikę oraz wyniki symulacji porównujące otrzymane wyniki.

2. Operatory różnicowe ułamkowego rzędu

W tym rozdziale zostaną wprowadzone niezbędne oznaczenia i definicje sumy i różnicy ułamkowego rzędu. Oznaczmy przez \mathbb{R} zbiór liczb rzeczywistych, przez \mathbb{Z} zbiór liczb całkowitych, przez $\mathbb{N} := \mathbb{Z}_{\geq 0}$ zbiór liczb naturalnych $\{0, 1, 2, \dots\}$ zawierający 0, a przez $\mathbb{Z}_{\leq 0} := \{0, -1, -2, \dots\}$ zbiór niedodatnich liczb całkowitych. Dla $a \in \mathbb{R}$ przez $\mathbb{N}_a := a + \mathbb{N}$ jest oznaczony zbiór $\{a, a + 1, \dots\}$.

Definicja 1. Przez $\Gamma: \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ oznaczmy funkcję Gamma Euler zdefiniowaną przez wyrażenie

$$\Gamma(\alpha) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha n!}{\alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + n)} \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}), \quad (1)$$

(zobacz [7, p. 156]) i

$$\Gamma(\alpha) = \begin{cases} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx & \text{jeżeli } \alpha > 0, \\ \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} & \text{jeżeli } \alpha < 0 \text{ i } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}. \end{cases} \quad (2)$$

Dolną potęgę krocząca $(s)^{(\alpha)}$ będziemy definiować przez wyrażenie

$$(s)^{(\alpha)} := \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+1-\alpha)} \quad (s \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{\leq -1}) \cap (\mathbb{R} \setminus \alpha + \mathbb{Z}_{\leq -1})) \quad (3)$$

dla $s \in \mathbb{R}$ z $s+1, s+1-\alpha \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$.

Definicja 2. Przez $\Delta_a^{-\nu} f: \mathbb{N}_{a+\nu} \rightarrow \mathbb{R}$ będziemy nazywać ν -tą sumę ułamkowego rzędu zdefiniowaną, jak poniżej

$$(\Delta_a^{-\nu} f)(t) := \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{k=a}^{t-\nu} (t-k-1)^{(\nu-1)} f(k) \quad (t \in \mathbb{N}_{a+\nu}).$$

dla $a \in \mathbb{R}, \nu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ i funkcji $f: \mathbb{N}_a \rightarrow \mathbb{R}$.

Zakładamy w dalszych rozważaniach, że $a = 0$ i będziemy używać skróconego zapisu $\Delta^{-\nu} f$ zamiast $\Delta_0^{-\nu} f$.

Definicja 3. Załóżmy, że $\alpha \in (0, 1), a \in \mathbb{R}$ i $f: \mathbb{N}_a \rightarrow \mathbb{R}$. Wówczas operator różnicowy Caputo ${}_c\Delta_a^\alpha f: \mathbb{N}_{a+1-\alpha} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcji f rzędu α jest zdefiniowany jako złożenie ${}_c\Delta_a^\alpha := \Delta_a^{-(1-\alpha)} \circ \Delta$ z $(1-\alpha)$ -tą sumą ułamkowego rzędu z klasycznym operatorem różnicowym w przód $t \mapsto \Delta f(t) := f(t+1) - f(t)$, tzn.

$$({}_c\Delta_a^\alpha f)(t) := (\Delta_a^{-(1-\alpha)} \Delta f)(t) \quad (t \in \mathbb{N}_{a+1-\alpha}).$$

Definicja 4. Operator różnicowy Riemanna-Liouvillea ${}_{R-L}\Delta_a^\alpha f: \mathbb{N}_{a+1-\alpha} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcji f rzędu α jest zdefiniowany jak poniżej ${}_{R-L}\Delta_a^\alpha := \Delta \circ \Delta_a^{-(1-\alpha)}$, tzn.

$$({}_{R-L}\Delta_a^\alpha f)(t) := (\Delta \Delta_a^{-(1-\alpha)} f)(t) \quad (t \in \mathbb{N}_{a+1-\alpha}).$$

Definicja 5. Operator różnicowy Grünwalda-Letnikova zdefiniowany jest przez formułę

$$\Delta^\alpha x(n) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{\alpha}{k} x(n-k),$$

gdzie:

- h jest czasem próbkowania (zakładamy, że jest równy 1),
- współczynnik $\binom{\alpha}{k}$ dany jest przez formułę

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } k = 0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)} & (\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}), \text{ jeżeli } k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

3. Model robota z zastosowaniem operatorów różnicowych ułamkowego rzędu

Rozważmy przykład prostego robota manipulacyjnego, którego łańcuch kinematyczny składa się z dwóch członów obrotowych [13]. Zlinearyzowany model matematyczny takiego robota w czasie ciągłym można wyrazić za pomocą macierzowego równania stanu:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

gdzie:

- stan układu jest określony przez

$$x_1(t) = q_1(t), \quad x_2(t) = q_2(t), \quad x_3(t) = \dot{q}_1(t), \quad x_4(t) = \dot{q}_2(t),$$

- I - jest macierzą jednostkową o wymiarze 2×2 ,
- A , B -są macierzami współczynników o wymiarze 2×2 ,
- $u_i(t)$ -jest sygnałem sterowania, $i = 1, 2$.

W obliczeniach numerycznych jednym ze sposobów na przybliżenie pochodnej funkcji jest zastosowanie różnic skończonych. Stosując takie przybliżenie za pomocą operatora różnicowego w przód [1, 2] równanie (4) można przedstawić:

- z zastosowaniem operatora Caputo

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \\ x_3(n+1) \\ x_4(n+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \\ a_{11} & a_{12} & \alpha & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \\ x_4(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} -\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n+1-k} \binom{\alpha}{n+1-k} x_1(k) \\ -\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n+1-k} \binom{\alpha}{n+1-k} x_2(k) \\ -\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n+1-k} \binom{\alpha}{n+1-k} x_3(k) \\ -\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n+1-k} \binom{\alpha}{n+1-k} x_4(k) \end{bmatrix} + (-1)^{n+1} \binom{\alpha-1}{n+1} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{bmatrix}, \tag{5}
 \end{aligned}$$

- z zastosowaniem operatora Riemanna-Liouvillea

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \\ x_3(n+1) \\ x_4(n+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \\ a_{11} & a_{12} & \alpha & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \\ x_4(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} -\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n+1-k} \binom{\alpha}{n+1-k} x_1(k) \\ -\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n+1-k} \binom{\alpha}{n+1-k} x_2(k) \\ -\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n+1-k} \binom{\alpha}{n+1-k} x_3(k) \\ -\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n+1-k} \binom{\alpha}{n+1-k} x_4(k) \end{bmatrix}, \tag{6}
 \end{aligned}$$

- z zastosowaniem operatora Grünwalda–Letnikova

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \\ x_3(n+1) \\ x_4(n+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \\ a_{11} & a_{12} & \alpha & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \\ x_4(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} -\sum_{k=2}^n (-1)^k \binom{\alpha}{k} x_1(n-k+1) \\ -\sum_{k=2}^n (-1)^k \binom{\alpha}{k} x_2(n-k+1) \\ -\sum_{k=2}^n (-1)^k \binom{\alpha}{k} x_3(n-k+1) \\ -\sum_{k=2}^n (-1)^k \binom{\alpha}{k} x_4(n-k+1) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

4. Wyniki symulacji

Symulacje równań (5)-(7) zostały przeprowadzone w środowisku Matlab. Dane numeryczne wykorzystane w symulacji miały wartości:

- macierze A i B :

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.06 \\ 0.25 & -0.6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.004 \\ -0.004 & 0.13 \end{bmatrix},$$

- sygnały sterujące:

$$u_1(n) = -500 \cdot \sin(n), \quad u_2(n) = 100 \cdot \cos(n),$$

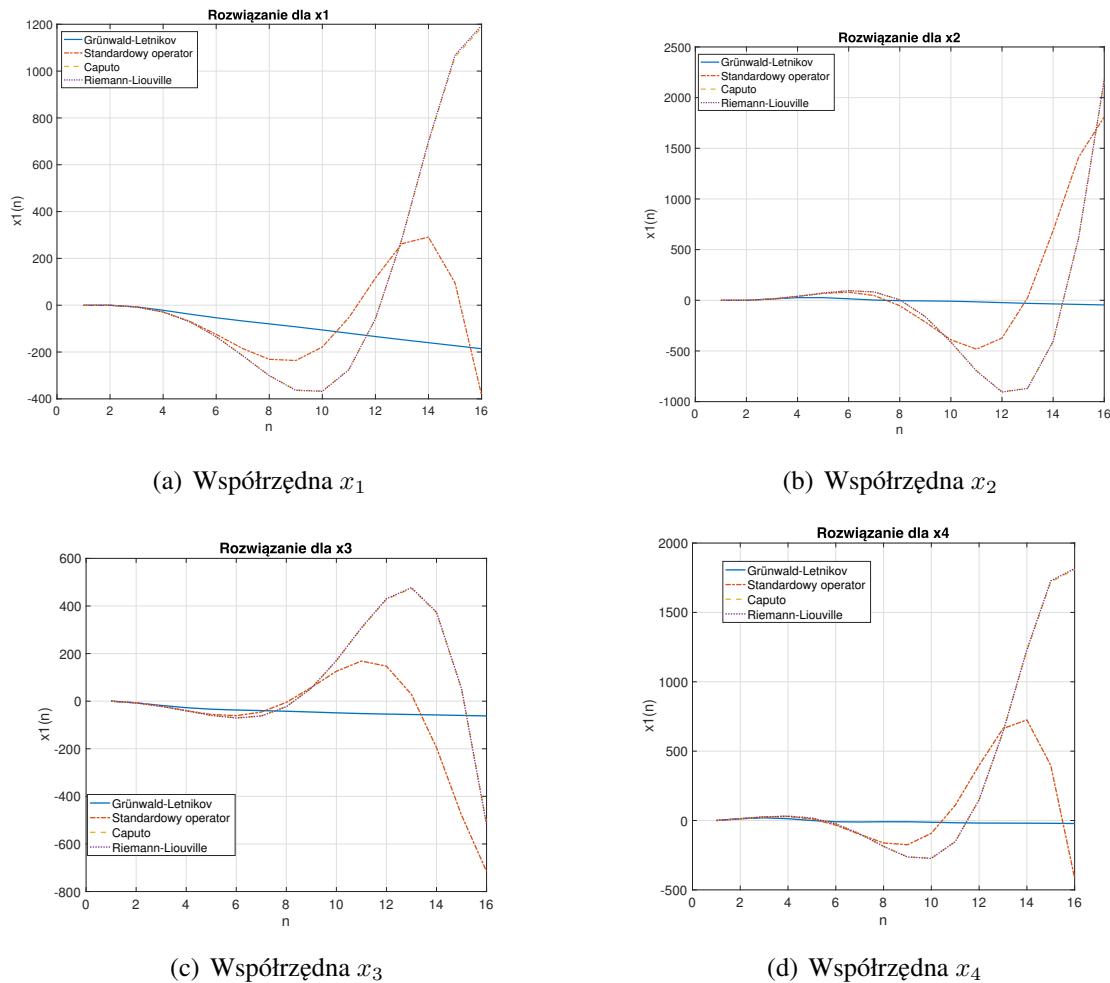
- warunki początkowe:

$$x_1(0) = -0.36, \quad x_2(0) = -0.36, \quad x_3(0) = 0, \quad x_4(0) = 0.$$

Przeprowadzono dwukrotnie symulacje z różnymi wartościami parametru $\alpha = 0.1$ oraz $\alpha = 0.5$. Liczba kroków $n = 15$. Na rysunku 1 przedstawiono wyniki dla $\alpha = 0.5$, a na rysunku 2 dla $\alpha = 0.1$. Charakter zachowania się poszczególnych zmiennych stanu jest podobny wynikający z zastosowanego sygnału sterującego. Różnice polegają głównie na wartościach maksymalnych, które osiągają przebiegi będące wynikiem symulacji dla równań z wykorzystaniem operatorów Caputo i Riemanna-Louvillea. Z otrzymanych wyników można wywnioskować, że model oparty na operatorze Grünwalda-Letnikowa jest najbardziej odporny na zmiany parametru α .

5. Uwagi końcowe

Głównym celem artykułu było przebadanie zachowania się dyskretnego modelu prostego robota manipulacyjnego z zastosowaniem równań ułamkowego rzędu z różnymi typami operatorów różnicowych. Zaproponowane modele nie są wynikiem analizy

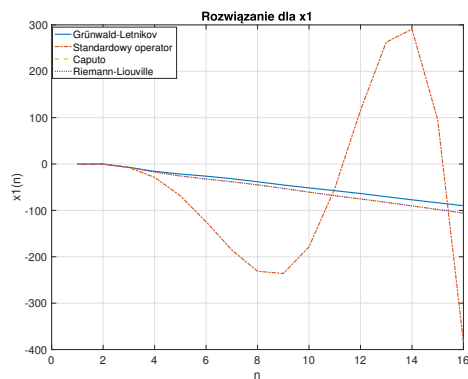
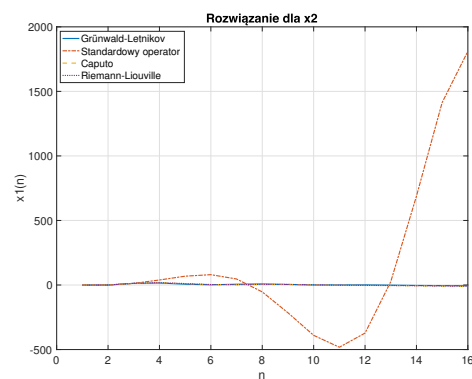
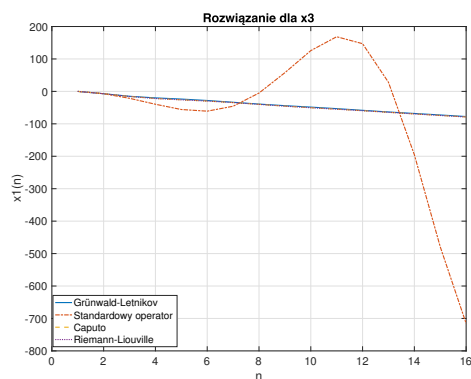
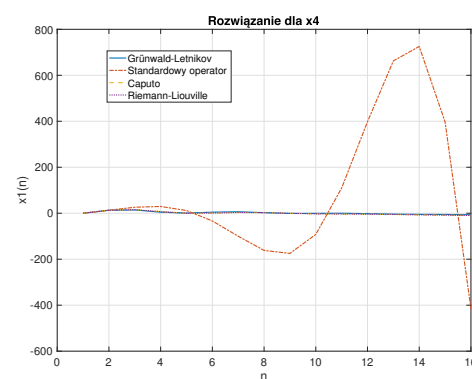


Rys. 1. Wyniki symulacji dla $\alpha = 0.5$.

zjawisk fizycznych, które są podstawą do wyprowadzania modeli matematycznych, ale ze względu na popularność rachunku ułamkowego rzędu sprawdzenie przydatności takich modeli w robotyce jest oczywiste. Należy zaznaczyć, że rachunek ułamkowego rzędu jest stosowany w chemii, ekonomii, a nawet w finansach i naukach społecznych.

Przedstawione wyniki symulacji odpowiadają programowaniu robota w trybie ręcznym, gdy operator odpowiednimi przyciskami wykonuje ruch odpowiednim członem robota. Dla takiego sposobu wykonywania ruchu można wnioskować, że modele oparte na rachunku ułamkowego rzędu byłyby lepsze, ponieważ w mniejszej liczbie kroków można osiągnąć założoną pozycję ramienia (wartości zmiennych stanu szybko narastają w porównaniu do zmiennych stanu standardowego modelu dyskretnego, rysunki 1 i 2).

Kolejnym krokiem powinno być przebadanie zaproponowanych modeli w zamkniętym układzie sterowania z odpowiednim regulatorem. Wówczas otrzymane wyniki mogą potwierdzić przydatność rachunku ułamkowego rzędu w robotyce.

(a) Współrzędna x_1 (b) Współrzędna x_2 (c) Współrzędna x_3 (d) Współrzędna x_4 Rys. 2. Wyniki symulacji dla $\alpha = 0.1$.

Podziękowania

Praca została sfinansowana przez Narodowe Centrum Badań i Rozwoju w ramach projektu DOB-BIO/7/13/05/2015 (K.J.) oraz w ramach grantu badawczego Politechniki Śląskiej 02/010/BK_17/0060 (A.B).

LITERATURA

1. Agarwal, R.: Discrete oscillation theory. Hindawi Publishing Corporation, 2005.
2. Babiaryz A.: An approach to stability problem of the second order difference equation. 20th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, (2015), pp. 99–103.
3. Babiaryz A., Czornik A., Klamka J., Niezabitowski M. (eds.): Theory and applications of non-integer order systems, Lecture Notes in Electrical Engineering Vol. 407, Springer International Publishing, Berlin, 2017.
4. Duch P., Łaski M., Błaszczuk S., Ostalczyk P.: Variable-, Fractional-Order Dead-Beat Control of a Robot Arm. In: Advances in the Theory and Applications of Non-integer Order Systems. Lecture Notes in Electrical Engineering, vol 257. Springer, Heidelberg 2013, pp. 313–323.

5. Jazar, R. N.: *Theory of applied robotics: kinematics, dynamics, and control*. Springer Science & Business Media, 2010.
6. González-Fierro M., Monje C.A., Balaguer C.: Fractional Control of a Humanoid Robot Reduced Model with Model Disturbances, *Cybernetics and Systems*, 47(6), 2016, 445–459.
7. Krantz S.: *Handbook of Complex Variables*. Birkhäuser Boston, 2012.
8. Lai R., Ohkawa F.: A simple discrete-time robot model and its control application. 23rd International Conference on Industrial Electronics, Control and Instrumentation, 1997, pp. 1448–1453.
9. da Graça Marcos M., Duarte F.B.M., Machado T.J.A.: Fractional dynamics in the trajectory control of redundant manipulators. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 13(9), 2008, pp. 1836–1844.
10. da Graça Marcos M., J.A. Tenreiro Machado T.J.A., Azevedo-Perdicoulis T.P.: A fractional approach for the motion planning of redundant and hyper-redundant manipulators. *Signal Processing*, 91(3), 2011, pp. 562–570.
11. Machado J.T., Kiryakova V., F. Mainardi F.: Recent history of fractional calculus. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 16, 2011, pp. 1140–1153.
12. Mitkowski W., Oprzędkiewicz K.: Fractional-Order $P2D^\beta$ Controller for Uncertain Parameter DC Motor. In: *Advances in the Theory and Applications of Non-integer Order Systems*. Lecture Notes in Electrical Engineering, vol 257. Springer, Heidelberg 2013, pp. 249–259.
13. Mustafa A., AL-SAIF A.: Modeling, simulation and control of 2-R robot. *Global Journal of Research In Engineering*, 14, 2014, pp. 49–54.
14. Neuman, C. P., Tourassis, V. D.: Discrete dynamic robot models. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, (2), 1985, pp. 193–204.
15. Ostalczyk P., Stolarski M.: Fractional-Order PID Controllers in a Mobile Robot Control. *IFAC Proceedings Volumes*, 42(13), 2009, pp. 268–271.
16. Park J.J., Lee S., B. Kuipers B.: Discrete-time dynamic modeling and calibration of differential-drive mobile robots with friction. *IEEE International Conference on Robotics and Automation (2017)*, pp. 6510–6517.
17. Skruch P., Mitkowski W.: Fractional-Order Models of the Ultracapacitors. In: *Advances in the Theory and Applications of Non-integer Order Systems*. Lecture Notes in Electrical Engineering, vol 257. Springer, Heidelberg 2013, pp. 281–293.
18. Spong M.V., Vidyasagar M.: *Robot Dynamics And Control*. Wiley India Pvt. Limited, 2008.
19. Velasco V. M., Aranda Bricaire, E., Orosco G. R.: Discrete-time modeling and path-tracking for a wheeled mobile robot. *Computación y Sistemas*, 13(2), 2009, pp. 142–160.