Rafał RÓŻYCKI, Grzegorz WALIGÓRA
Politechnika Poznańska

JAK POPRAWIĆ EFEKTYWNOŚĆ POSZUKIWANIA NAJKRÓTSZEGO USZEREGOWANIA ZADAŃ WYKONYWANYCH W WARUNKACH OGRANICZONEJ ENERGII

Streszczenie. W rozważanym problemie zadania podzielne i niezależne należy uszeregować w taki sposób, aby długość ich uszeregowania na maszynach równoległych, identycznych była najmniejsza. Czas wykonywania zadania nie jest znany a priori, gdyż chwilowa szybkość jego realizacji zależy od aktualnej ilości przydzielonego mu zasobu ciągłego. Zakłada się dodatkowo, że zasób ten jest podwójnie ograniczony, co oznacza, że ograniczone są zarówno jego chwilowy pobór, jak i całkowite zużycie. Każde zadanie charakteryzują: ten sam moment gotowości do wykonania (dla uproszczenia równy zero), rozmiar oraz funkcja szybkości wykonywania. W celu rozwiązania problemu, oprócz wskazania sekwencji zadań na maszynach, należy dodatkowo znaleźć rozdział zasobu ciągłego, podwójnie ograniczonego między wszystkie zadania w uszeregowaniu. Użyty model wykonywania zadania umożliwia zmianę pobieranej ilości tego zasobu w trakcie wykonywania zadania. W powyższy sposób modeluje się na przykład problemy szeregowania zadań obliczeniowych wykonywanych na procesorach równoległych. Szybkość każdego zadania zależy od chwilowej ilości przydzielonej mu mocy i wyrażona jest charakterystyczną dla każdego zadania rosnącą (w praktyce też wklęsłą) funkcją szybkości. Zasób ciągły podwójnie ograniczony stanowi tu para moc/energia, co oznacza, że zadania współubiegają się o ograniczony pobór mocy i limitowane zużycie energii.

Wnioski

W ogólności do znalezienia uszeregowania optymalnego wystarczy rozwiązać pewien nieliniowy problem programowania matematycznego, w którym wykorzystuje się możliwość analitycznego obliczenia długości minimalno-czasowego uszeregowania zadań o znanych rozmiarach wykonywanych równolegle. Niestety, ograniczona liczba maszyn sprawia, że w ogólności nie wszystkie zadania mogą być wykonywane równolegle. W takim wypadku problem programowania matematycznego sprowadza się do znalezienia takiego rozdziału rozmiarów zadań oraz porcji dostępnej energii między wszystkie możliwe kombinacje zadań na maszynach, które prowadzą do uszeregowania o najmniejszej długości.

Opisany wyżej problem programowania matematycznego jest bardzo skomplikowany z punktu widzenia efektywności metod numerycznych użytych do jego rozwiązywania. Po pierwsze, liczba zmiennych w problemie rośnie wykładniczo wraz z rozmiarem instancji. Po drugie, jest to problem niewypukły, nawet dla ściśle wklęsłych funkcji szybkości. Rodzi to dodatkowe problemy natury numerycznej wynikające z tego, że wykonywanie niektórych kombinacji zadań na maszynach jest z punktu widzenia długości całego uszeregowania nieopłacalne. Fragment uszeregowania odpowiadający takiej kombinacji ma długość zero. Niestety analityczne wyznaczenie fragmentu uszeregowania o zerowej długości jest niemożliwe. W konsekwencji, do sformułowania problemu konieczne jest wprowadzenie dodatkowych ograniczeń, co oczywiście utrudnia poszukiwanie optimum.

W pracy proponujemy różne podejścia, które w pewnych sytuacjach mogą ułatwić znalezienie uszeregowania o najmniejszej długości.

Można wykorzystać specyfikę problemów, w ograniczeniach których występuje zasób podwójnie ograniczony. Okazuje się, że jedynie dla bardzo małej liczby instancji problemu w odpowiadającym im uszeregowaniu optymalnym aktywne są zarówno ograniczenia na moc, jak i na energię.

Warto w tym miejscu zauważyć, że uwzględnienie w problemie programowania matematycznego tylko jednego z dwóch ograniczeń znacząco ułatwia znalezienie rozwiązania optymalnego. Jeśli zaniedbamy w sformułowaniu problemu ograniczenie na energię, problem nieliniowy staje się wypukły, co oczywiście ułatwia jego rozwiązywanie. W przeciwnym przypadku, gdy pozostawimy ograniczenie na energię, a zaniedbamy ograniczenie na moc, problem wprawdzie nadal pozostanie niewypukły, ale za to dużo łatwiej można wtedy obliczyć długości poszczególnych fragmentów uszeregowania.

W literaturze znaleźć można próby wypracowania metody oceny instancji problemu z punktu widzenia tego, które ograniczenie będzie w jego wypadku aktywne. Dotychczas opracowane testy są jednak dość zgrubne i okazują się użyteczne jedynie w rzadkich przypadkach.

Uzasadnione jest więc następujące postępowanie. Najpierw poszukuje się uszeregowania optymalnego bez ograniczenia na energię. Jeśli znalezione rozwiązanie nie narusza ograniczenia na energię (sprawdzenie tego warunku jest trywialne), jest ono rozwiązaniem optymalnym problemu. W przeciwnym przypadku poszukuje się najkrótszego uszeregowania przy założeniu, że nieaktywne (a więc nieuwzględnione w ograniczeniach) jest ograniczenie na moc. Jeśli rozwiązanie tego problemu nie narusza ustalonego limitu mocy, jest ono optymalne. Jeśli jednak zadania uszeregowane w ten sposób pobierają więcej mocy niż to możliwe, konieczne jest rozwiązanie problemu ogólnego z oboma ograniczeniami. Zauważmy, że takie trzyetapowe postępowanie, w skrajnej, ale rzadkiej sytuacji, wymaga rozwiązania aż trzech nieliniowych problemów programowania matematycznego. Na szczęście, w zdecydowanej liczbie przypadków, kończy się ono na jednym z dwóch pierwszych etapów.

Praca przyjęta do publikacji w Discrete Applied Mathematics